

تطور مفاهيم الفيزياء المعاصرة  
Development  
of  
Modern Physics Concepts

تأليف

ا.د/ عبدالهادي محمد حمدان البرغوثي

أستاذ الفيزياء (سابقاً)

جامعة القدس – فلسطين

جامعة ام القرى – مكة المكرمة

الطبعة الأولى

2020م- 1441هـ



حقوق الطبع محفوظة للمؤلف

©

إهداء

لى زوجتى ولبنتى الغائبتين

## الفهرس

8.....	المقدمة
10.....	الوحدة الأولى : النظرية النسبية الخاصة .....
11.....	(1.1) مقدمة .....
12.....	(1.2) مبادئ النسبية الكلاسيكية : معادلات تحويل غاليلو .....
13.....	(1.2.1) تحويل الطول .....
13.....	(1.2.2) تحويل السرعة .....
13.....	(1.2.3) تحويل التسارع .....
14.....	(1.2.4) تحويل القانون الأساسي في الديناميكا ( قانون نيوتن الثاني) .....
15.....	(1.3) تجربة ميكلسون – مورلي .....
17.....	(1.4) النظرية النسبية الخاصة .....
18.....	(1.5) تحويلات لورنس .....
23.....	(1.6) تحويل السرعة .....
25.....	(1.7) التزامنية ( التوافقية ) .....
26.....	(1.8) إنكماش لورنس .....
27.....	(1.9) تمدد الزمن .....
28.....	(1.10) التحقق التجريبي لتقلص الطول وتمدد الزمن : .....
29.....	(1.11) الفترة .....
30.....	(1.12) ظاهرة دوبلر .....
35.....	(1.13) الميكانيك النسبي .....
36.....	(1.14) التعبير النسبي للزخم : تغير الكتلة مع السرعة .....
39.....	(1.15) القانون الأساسي في الديناميكا النسبية .....
41.....	(1.16) تكافؤ الكتلة - الطاقة .....
44.....	(1.18) زخم الفوتون .....
45.....	(1.19) تحويل الزخم والطاقة .....
46.....	(1.20) برهان قانون تكافؤ الكتلة - الطاقة .....
49.....	تمارين محلولة .....
67.....	تمارين الوحدة الأولى .....
70.....	الوحدة الثانية : ميكانيكا الكم .....

71.....	الفصل الأول : اصل مفاهيم الكم.....
72.....	1.1 ( مقدمة.....
72.....	1.2 اشعاع الجسم الأسود.....
74.....	1.3 التوزيع الطيفي للطاقة في الإشعاع الحراري.....
75.....	1.4 النظريات الكلاسيكية لإشعاع الجسم الأسود.....
75.....	1.4.1 قانون فين.....
75.....	1.4.2 قانون ريلي - جينز.....
77.....	1.5 قانون بلانك في الإشعاع.....
81.....	1.6 استنتاج قانون ستيفان من قانون بلانك.....
82.....	1.7 استنتاج قانون ازاحة فين.....
84.....	أتمارين محلولة.....
86.....	1.8 الظاهرة الكهروضوئية.....
93.....	1.9 ظاهرة كومبتون.....
97.....	تمارين محلولة.....
101.....	1.10 اشعاع التوقف.....
103.....	1.11 ظاهرة رامان.....
106.....	تمارين محلولة.....
107.....	1.12 ازدواجية طبيعة الإشعاع.....
109.....	تمارين الفصل الأول.....
111.....	2.1 مقدمة.....
111.....	2.2 فرضية دي برولي.....
113.....	2.3 البرهان العملي لفرضية بور.....
116.....	2.4 السلوك الموجي للجسيمات العيانية.....
117.....	2.5 وجهات نظر تاريخية.....
117.....	2.6 رزمة الموجة.....
121.....	2.7 سرعة الجسيم وسرعة المجموعة.....
122.....	2.8 مبدأ هيزنبرغ في الشك او مبدأ اللاتحديد.....
124.....	تمارين محلولة.....
136.....	تمارين.....
138.....	الفصل الثالث : معادلة شرودنجر.....
138.....	3.1 مقدمة.....
139.....	3.2 معادلة شرودنجر.....

144.....	(3.3) المعنوية الفيزيائية لدالة الموجة $\psi$ .....
147.....	(3.5) معادلة شرودنجر في الإحداثيات الكروية.....
148.....	(3.6) المؤثرات في ميكانيكا الكم.....
155.....	(3.7) معادلة القيمة الذاتية.....
158.....	(3.8) الخاصية التعامدية للدوال الذاتية.....
160.....	(3.9) المشاهدات المتوافقة وغير المتوافقة.....
161.....	(3.10) المتبادل.....
166.....	(3.11) العلاقات التبديلية للمؤثرات الدرجية :.....
168.....	(3.12) القيمة المتوقعة.....
170.....	(3.13) نظرية إيرنست.....
173.....	(3.14) تركيب الحالات ( نظرية التمدد).....
176.....	(3.15) المؤثر الملاصق.....
176.....	(3.16) المؤثر الهيرميتي ( المؤثر ذاتي التلاصق).....
177.....	(3.17) الدوال الذاتية للمؤثر الهيرميتي.....
178.....	(3.18) القيم الذاتية للمؤثر الهيرميتي.....
178.....	تمارين محلولة.....
200.....	تمارين.....
203.....	الفصل الرابع : مسائل حاجز الجهد.....
203.....	(4.1) عتبة الجهد أو عتبة الحاجز.....
208.....	(4.2) حاجز الجهد ( ظاهرة النفق).....
216.....	(4.3) جسيم في بئر جهد احادي البعد ومحدود العمق.....
222.....	(4.4) نظرية انبعاث ألفا.....
227.....	تمارين.....
229.....	الفصل الخامس : صياغة ميكانيكا الكم.....
229.....	(5.1) القيم الذاتية والدوال الذاتية للمؤثرات $L^2$ و $L_z$ .....
238.....	(5.2) الصياغات الفرضية لميكانيكا الكم.....
240.....	(5.3) تشكيل ديراك لميكانيكا الكم.....
243.....	(5.4) التعريف العام للزخم الزاوي.....
251.....	(5.5) التعادلية.....
254.....	تمارين.....
256.....	الفصل السادس : الجسيم المحصور في صندوق.....
256.....	(6.1) جسيم في بئر جهد عميق غير محدود ( صندوق).....

260	(6.2) جسيم في بئر جهد ثنائي الأبعاد .....
263	(6.3) جسيم في بئر جهد ثلاثي الأبعاد .....
266	(6.4) الإنحلالية .....
267	(6.5) كثافة الحالات .....
269	(6.6) بئر الجهد المتمائل كرويا .....
273	تمارين محلولة .....
275	تمارين .....
277	الفصل السابع : المتذبذب التوافقي .....
277	(7.1) معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي .....
277	(7.1.1) معالجة كلاسيكية .....
279	(7.1.2) معالجة كمية .....
292	تمارين .....
295	الفصل الثامن : المدوار الصلب .....
295	(8.1) مقدمة .....
304	تمارين .....
305	الفصل التاسع : جسيم في مجال قوة مركزي .....
305	(9.1) إختزال مسألة ثنائي الجسم الى مسألتين مكافئتين من احادي الجسم في قوة مركزية .....
309	(9.2) ذرة الهيدروجين .....
321	(9.3) بعد الإلكترون الأكثر احتمالا عن النواة .....
323	(9.4) التشعبية لمستويات طاقة الهيدروجين .....
324	(9.5) خصائص دوال موجة ذرة الهيدروجين .....
326	تمارين محلولة .....
330	تمارين .....
333	المراجع .....

## المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسلام على نبيه الكريم والحمد لله رب العالمين.

نظرا لحاجة طلاب العلوم والرياضيات وطلبة الهندسة في المرحلة الجامعية الى مرجع يعالج المفاهيم الفيزيائية بشرح بسيط ومفصل ومكتوبا باللغة العربية مما يعمق التفكير لهذه المفاهيم ويعمل على تطوير القدرات الذهنية للطلبة في الجامعات والكليات العربية . لذلك ، تم وضع هذا الكتاب بين يدي الطلبة والذي يقدم مراحل تطوير مفاهيم الفيزياء الحديثة ، وهو يستند في مادته على أسس المحاضرات التي كنت اعطيها للطلبة في الجامعات العربية.

يتكون هذا الكتاب من وحدتين أساسيتين ، حيث الوحدة الأولى تتناول مبادئ النظرية النسبية الخاصة التي وضعها أينشتاين في بداية القرن العشرين ، وهذه المبادئ أسست مرحلة جديدة لتطوير ميكانيكا نيوتن في القرن السابع عشر. وتستند هذه المبادئ على ربط مفهوم المكان بالزمان في معادلات تحويلية في حالة السرعة العالية وبرهنت ان قوانين الحركة لنيوتن هي حالات خاصة للسرعة النسبية ( نسبة لسرعة الضوء) المقترية من الصفر.

وقد استعرضت الوحدة الثانية تطور مفاهيم ميكانيكا الكم خلال القرن العشرين استنادا تفسير نتائج الظواهر الفيزيائية المكتشفة في تلك الحقبة الزمنية : اشعاع الجسم الأسود المثالي ، الظاهرة الكهروضوئية، ظاهرة كومبتون ، وظاهرة ريمان . كما استندت فرضيات طبيعة الجسيم - الإشعاع على مبدأ دي برولي وهذا أدى الى افتراض الطبيعة الثنائية للإشعاع. كما تم بلورة مبدأ اللاتحديد ( مبدأ الشك) لهيزنبرغ ، وهذا أدى الى وضع أسس شرط بوهر الكمي .

كما تناول هذا الكتاب في الفصل الثالث معادلة شرودنجر والتي قدمت حلا لمعادلة حركة الأنظمة في المجال المجهرى ، وهذا ادخل الى مفاهيم الفيزياء ما يعرف بالمتغيرات الديناميكية (المشاهدات). كما تم تقديم مفهوم دالة الموجة المتغيرة مكانيا وزمانيا بإستخدام حل هذه المعادلة في الإحداثيات الكروية . كما استعرض الكتاب مفهوم المؤثرات واستخدامها في ميكانيكا الكم . مما أدى الى تطوير مفهوم جديد في الفيزياء يعرف بالقيم الذاتية ، وقد تم دراسة خواص هذه القيم .

في الفصل الرابع ، تناول هذا الكتاب دراسة حلول معادلة شرودنجر لجسيمات بطاقات مختلفة وفي مناطق جهد متنوعة ، جهد محدود وغير محدود . كما أعطيت امثلة على حلول هذه المعادلة. وفي الفصل الخامس ، تناول الكتاب القيم الذاتية لمؤثر مربع الزخم الزاوي ومركبته في اتجاه محور Z ، وهذا ما يعرف ببداية وضع قوانين ميكانيكا الكم الحالية . كما تناول الفصل السادس دراسة حلول معادلة شرودنجر لجسيم في منطقة ذات جهد غير منتهي ( غير محدود) وعميق في حالة الحركة ذات البعدين وثلاثة ابعاد ودراسة كثافة الحالات .

اما في الفصلين السابع والثامن ، فقد تم استعراض دراسة حالة المتذبذب الأفقي والمدوار الصلب ، حيث تم حل معادلة شرودنجر لإيجاد طاقات الحالات من خلال دوال رياضية تعرف باسم دوال ليجنارد (كثيرة الحدود) المصاحبة. وأخيرا ، تناول هذا الكتاب في الفصل التاسع حلا لمعادلة



شرودنجر لنظام ثنائي الجسيمات وإختراله الى نظام احادي الجسيم مكافئ لهذا النظام في حالة مجال مركزي . كما تم عرض حلا لمعادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين بأستخدام الإحداثيات الكروية. مما ادخل فكرة التشعبية في الحالات ومفهوم تكميم الزخم الزاوي .

تم بعون الله وله المنة والحمد ،

والله من وراء القصد .

أ.د/ عبدالهادي محمد حمدان البرغوثي

عابود – رام الله

فلسطين

الوحدة الأولى : النظرية النسبية الخاصة

## 1.1) مقدمة Introduction

تحدث جميع الظواهر الطبيعية في مضمار المكان والزمان *space and time*، وتتألف الظاهرة الطبيعية من الحوادث المتعاقبة . فيزيائيا ، نعني بالحدث *event* الشيء الذي يحدث عند نقطة ما في الفراغ وفي لحظة زمنية ما . ومن المعلوم ان وصف هذه الظواهر يشمل احداثيات المكان والزمن ، وقد تتطور علم الميكانيكا الكلاسيكي وفقا لمفاهيم المكان والزمن المنبثقة من رصد حركة الأجسام المادية بسرعة صغيرة بالنسبة لسرعة الضوء في الفراغ . في ميكانيكا نيوتن ( الميكانيكا الكلاسيكية ) ، افترض ان المكان ( الفضاء ) يمكن تحديده بثلاثة ابعاد *Dimensions* ويخضع لهندسة اقليدس *Euclidean geometry* ، كما اعتبر ان المكان والزمن مستقلان عن بعضهما البعض ، بمعنى ان الفترة المكانية بين اي تقطعتين في الفضاء والفترة الزمانية بين حدثين معينين لا تعتمد على حالة المراقب ( الملاحظ ) *observer* . بمعنى ان اي حدثين متزامنان *simultaneous* في اطار *frame* ما يكونان متزامنان ايضا في جميع الأطر الأخرى . هذا يعنى ان التزامنية هي مفهوم مطلق في *absolute concept* . اضافة الى ذلك ، افترض ان المكان والزمن يكونين متجانسان ومتماثلان المناحي *homogeneous and isotropic* ، وتعني هذه التجانسية كل نقاط الفضاء وكل اللحظات الزمنية تكون متماثلة . وعليه ، لا تكون الفترات المكانية والزمانية لحدثين معتمدة على اين ومتى تتم عملية قياسها . ولذلك ، يمكن اختيار نقطة الأصل لإحداثيات النظام بحرية تامة . كما تعني تماثلية المناحي للفضاء ان كل الإتجاهات تكون متكافئة ، مما يسمح بترتيب هذه المحاور في اي اتجاه .

يتطلب وصف الظاهر الطبيعية اختيار ما يسمى بالإطار المرجعي *Reference Frame* الذي ينسب اليه قياس الاحداثيات المكانية والزمانية ، ومن خلال جميع الأطر المرجعية المعقولة ، تكون الأطر السهلة تلك التي تجعل القوانين الفيزيائية مبسطة . وتسمى هذه الأطر التي تملك هذه الخاصية بالأطر الخاملة *Inertial frames* ، وهي التي يتحقق فيها قانون نيوتن الأول ( قانون القصور الذاتي ) . وبعبارة اخرى ، هي تلك الأطر التي فيها يكون الجسم متحركا بانتظام *uniformly* في مستوى في حالة عدم وجود قوى خارجية مؤثرة عليه . ايضا ، تكون كل الأطر المرجعية المتحركة بسرعة ثابتة بالنسبة لإطار حامل هي اطر خاملة . كما يسمى الإطار المتحرك بتسارع بالنسبة للإطار الخامل اطارا غير حامل *non- inertial frame* ، حيث لا تحقق صحة قانون نيوتن الأول في هذا الإطار .

فيزيائيا ، افترض ان المحاور ، التي لها نقطة أصل عند مركز الشمس وتكون موجهة نحو نجم ثابت في الفضاء ، تمثل اطارا خاملا اساسيا *fundamental inertial frame* ، وفي هذا الإطار تبدو حركة الكواكب بسيطة ، وتتحقق صحة قوانين نيوتن في الميكانيكا . وقد يتبادر الى الذهن السؤال التالي : هل يمكن اعتبار ان الأرض هي اطارخامل ام لا . للإجابة على هذا التسائل نقول ما يلي: يكون مقدار التسارع المرافق لحركة الأرض المدارية حول الشمس  $0.006 m/s^2$  ، ومقدار التسارع لحركتها المغزلية عند خط الإستواء يساوي  $0.034 m/s^2$  ، عمليا ، تعتبر هذه المقادير صغيرة لدرجة يمكن اهمالها ، ولذلك يمكن اعتبار الأرض إطارا خاملا لحد ما ، بينما في حالة القياسات الدقيقة ، يجب الأخذ بعين الإعتبار هذه المقادير .

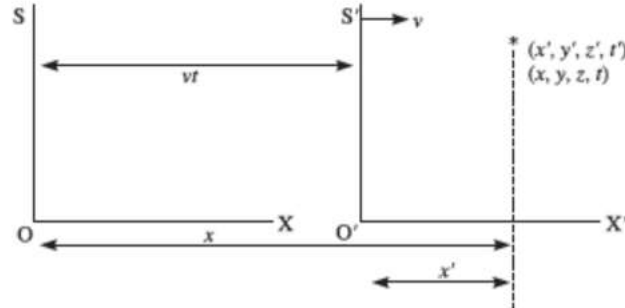
في نهاية القرن التاسع عشر ، بدأت ملاحظة الانحرافات بين النتائج النظرية العملية في القياسات الفيزيائية الميكانيكية ، حيث اصبح من الممكن ان تتحرك الجسيمات ( الإلكترونات ) بسرعة يمكن مقارنتها مع سرعة

الضوء في الفراغ ، واصبح بالإمكان ملاحظة هذه الانحرافات بشكل ملموس . في عام 1905 ، اعطى العالم اينشتين افكارا جديدة تتعلق بالمكان والزمان ، وبذلك وضع اساس ما يعرف بالنظرية النسبية الخاصة .

## (1.2) مبادئ النسبية الكلاسيكية : معادلات تحويل غاليليو

### *Classical Principle of Relativity : Galilean Transformation Equations*

معادلات تحويل غاليليو هي مجموعة معادلات تربط بين الإحداثيات المكانية والزمانية لحدث مراقب في إطارين خاملين، واللذان في حركة بالنسبة لبعضهما البعض. نعتبر إطارين خاملين :  $S$  ,  $S'$  بحيث تكون محاورهم المتقابلة متوازية ، لنفرض ان الإطار  $S'$  يتحرك بسرعة  $v$  بالنسبة للإطار  $S$  في الإتجاه المشترك  $x - x'$  (الشكل 1.2.1) . لنفرض ان في كل إطار يوجد مراقب مزود بمقياس للطول ( متر) ومقياس الزمن ( ساعة ) ، حيث تكون هذه الأدوات متماثلة في كلا الإطارين .



شكل (1.2.1) تحويل غاليليو .

لنفرض ان عند مرور نقطة الأصل  $O'$  بنقطة الأصل  $O$  ، فإن كلا من المراقبين يضبطان ساعتيهما على الصفر ، اي ،  $t, t' = 0$  ، ويكون الحدث المراقب هو عبارة عن حركة جسيم ما . عند لحظة معينة ، يسجل المراقب  $S$  الإحداثيات المكانية والزمانية لهذا الجسيم كالتالي :  $(x, y, z, t)$  ، بينما يسجلها المراقب  $S'$  كما يلي :  $(x', y', z', t')$  . وتكون العلاقة بين هذه الإحداثيات كالتالي

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad \dots(1.2.1)$$

تعرف هذه المعادلات بمعادلات تحويل غاليليو . وبنيت المعادلة الأخيرة في معادلات (1.2.1) على اساس ان معدل سريان الزمن متساو في كل الأطر الخاملة ، وهذا ما يلاحظ في حركة الأجسام المألوفة في حياتنا اليومية .

بالنسبة للإطار ، يكون الإطار متحركاً  $S$  بسرعة  $v$  في اتجاه محور  $x$  السالب ولذلك يمكن الحصول على معادلات تحويل غاليليو العكسية بتبديل الإحداثيات المؤشرة بغير المؤشرة واستبدال  $v$  في المعادلات بالرمز  $-v$  ، وعليه

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad \dots(1.2.2)$$

## (1.2.1) Transformation of Length تحويل الطول

لنرى كيف يتحول طول جسما ما عند الانتقال بين الإطارين الخاملين  $S$ ,  $S'$  السابق ذكرهما . نعتبر ان قضيبا موضوعا على محور  $x$  في الإطار  $S$  ، يكون طوله مساويا للفرق بين احداثيات نهايتيه:  $\ell = x_2 - x_1$  . في الإطار  $S'$  ، يكون طول هذا القضيب محددًا بالفرق بين إحداثيات طرفيه المقاسة آنيا. اي:

$$\ell' = x_2' - x_1'$$

باستخدام معادلات تحويل غاليليو ، نجد ان

$$\ell' = (x_2 - vt) - (x_1 - vt) = x_2 - x_1 = \ell$$

هذا يشير الى ان المسافة بين نقطتين تكون ثابتة (غير مختلفة) *invariant* في تحويلات غاليليو .

## (1.2.2) Transformation of Velocity تحويل السرعة

باشتقاق المعادلة الأولى من معادلات تحويل غاليليو ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx}{dt} - v \\ u_x' &= u_x - v \end{aligned} \quad \dots(1.2.3)$$

حيث  $u_x, u_x'$  تمثل مركبات سرعة الجسم السينية المقاسة في الإطارين  $S, S'$  على الترتيب . تعرف معادلة (1.2.3) بالقانون التقليدي لتحويل السرعة، ويكون القانون العكسي المرافق له كما يلي

$$u_x = u_x' + v \quad \dots\dots (1.2.4)$$

تشير هذه المعادلات الى ان السرعة متغيرة *variant* في الإطارين وتعتمد على سرعة هذين الإطارين النسبية .

## (1.2.3) Transformation of Acceleration تحويل التسارع

باشتقاق معادلة (1.2.3) بالنسبة للزمن ، نحصل على التالي

$$\frac{du_x'}{dt} = \frac{du_x}{dt} \Rightarrow a_x' = a_x \quad \dots(1.2.5)$$

تشير هذه المعادلة الى ان تسارع الجسم في الإطارين الخاملين تكون ثابتة ( غير مختلفة ) في تحويلات غاليليو.

#### (1.2.4) تحويل القانون الأساسي في الديناميكا ( قانون نيوتن الثاني )

##### *Transformation of the Fundamental Law of Dynamics ( Newton's Law)*

يربط قانون نيوتن الثاني في الديناميكا بين القوة المؤثرة على جسما كتلته  $m$  مع تسارعه كالتالي

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \dots(1.2.6)$$

حيث يفترض في الميكانيكا الكلاسيكية ان كتلة الجسم لا تتوقف على سرعة الجسم المتحرك ،وتكون القوى المعتمدة على الموقع ( قوة الجاذبية ، القوة الكهروستاتيكية ، وقوة المرونة ) وكذلك القوى المعتمدة على السرعة ( قوة الإحتكاك ، قوة اللزوجة) ثابتة ( غير مختلفة ) في تحويلات غاليلو لأن الطول ، والسرعة النسبية ، والزمن تكون غير مختلفا . وعليه ، يكون قانون نيوتن الثاني غير مختلف ايضا. اي

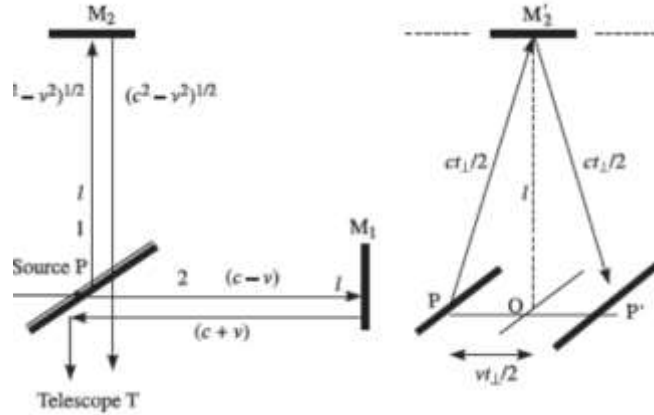
$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F} && \text{in frame } S \\ m'\mathbf{a}' &= \mathbf{F}' && \text{in frame } S' \end{aligned}$$

وهذا الثبات في القانون الأساسي في الميكانيكا يضمن ان كل الظواهر الميكانيكية تجري تماثليا في كل الأطر الخاملة ، وعبارة اخرى تكون كل الأطر الخاملة متكافئة اطلاقا *absolutely equivalent* ، وهذه العبارة تعرف بمبدأ النسبية الكلاسيكية ( نسبية غاليلو) . واستخدمت هذه النسبية بنجاح حتى منتصف القرن التاسع عشر لتفسير الظواهر الميكانيكية . ولكن مع تطور فروع علم الفيزياء بعد منتصف ذلك القرن ، بدأ يتسائل الفيزيائيون عن مدى صلاحية هذه النسبية في تطبيق قوانين هذه الفروع الفيزيائية الجديدة مثل قوانين الديناميكا الكهربائية والضوء . فعلى سبيل المثال ، تم استنتاج ان الضوء عبارة عن ظاهرة كهرومغناطيسية وذلك باستخدام معادلات ماكسويل ، وان الضوء ينتشر في الفراغ بسرعة  $c = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  ، وهذا ارغم العلماء على اعتبار وجود وسط خيالي شفاف عرف بالأثير *either* لتفسير انتقال الموجات الضوئية في الفراغ. كما اعتبر ان الأثير في حالة سكون وان الضوء يسير بسرعة  $c$  بالنسبة لهذا الوسط . اذا تحرك اطارا معيناً بسرعة  $v$  بالنسبة للأثير ، فإن سرعة الضوء في هذا الإطار ، وفقا لتحويل غاليلو، تساوي  $c \pm v$  ، حيث تكون الإشارة السالبة عندما  $c$  تكون في اتجاه  $v$  ، بينما تكون الإشارة الموجبة اذا كانت  $c$  في الإتجاه المضاد لإتجاه  $v$  . وعليه ، تختلف سرعة الضوء في الإطارات المختلفة. ولذلك ، أجرى العالمان ميكلسون و مورلي تجربة لتحري حركة الأرض بالنسبة للأثير ( كما سيرد شرحه في البند اللاحق) .

عندما طبقت معادلات تحويل غاليلو على قوانين الديناميكا الكهربائية الجديدة ( معادلات ماكسويل) ، وجد ان هناك تغيرا في الصور الرياضية لتلك القوانين عند الانتقال من اطار الى آخر، مما ادى الى تحري صحة هذه القوانين ، وجرت عدة محاولات لتعديلها لتلائم مع مبدأ نسبية غاليلو، ولكن هذه المحاولات ادت الى استنتاج ظاهرة جديدة لم يتمكن العلماء من برهانها تجريبيا ، وعليه اصبح من اليقين ان لا حاجة لتعديل معادلات ماكسويل .

### (1.3) تجربة ميكلسون – مورلي Michelson- Morley Experiment

في عام 1881 ، أجرى العالمان ميكلسون ومورلي تجربة للكشف عن حركة الأرض بالنسبة للوسط الإفتراضي ( الأثير) ، الذي افترض ان يكون في حالة سكون . وكان الجهاز المستخدم هو مطياف ميكلسون المبين في الشكل (1.3.1) .



شكل (1.3.1) مطياف ميكلسون .

يتكون هذا المطياف من مرتأتين مستويتين  $M_1$  ،  $M_2$  مثبتتين على ذراعين متعامدين :  $PM_1$  ،  $PM_2$  . عند نقطة تقاطع هذان الذراعان توجد صفيحة زجاجية التي يكون سطحها الخلفي نصف مفضلز وتميل بزواوية  $45^0$  مع هذه الأذرع. اذا سقط شعاع ضوئي احادي اللون على الصفيحة  $P$  فإنه ينقسم الى جزأين :الشعاع الأول (1) يسير عبر الذراع  $PM_1$  وينعكس على نفسه وينعكس جزئيا مرة اخرى عند السطح الخلفي للصفيحة  $P$  ويذهب الى المنظار (T) . بينما يسير الجزء الثاني من الشعاع (2) عبر الذراع  $PM_2$  ، وينعكس على سطح المرآة  $M_2$  ، ويرتد على نفسه نحو الصفيحة  $P$  ، وينفذ الى المنظار (T) . وعليه ، نحصل على اهداب التداخل بفعل تداخل هذان الشعاعان ، ويشاهد نمط التداخل عبر مجال المنظار.

يكون التحليل الرياضي لهذه التجربة كالتالي:

لنفرض ان في لحظة إجراء التجربة يتحرك الجهاز مع الأرض بسرعة  $v$  في مداره على طول الذراع  $PM_1$  . تكون سرعة الضوء المسافر عبر المسار  $PM_1$  بالنسبة الى الجهاز هي  $c - v$  ، بينما تكون سرعة هذا الضوء عبر المسار  $P M_1$  تساوي  $c + v$  . اذا كان طول هذا الذراع يساوي  $l$  فإن الزمن الذي يستغرقه هذا الشعاع لقطع المسار  $PM_1 P$  يساوي تقريبا ما يلي

$$t_{\parallel} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} = \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \dots(1.3.1)$$

( مع ملاحظة ان  $v/c \ll 1$  وهذا يسمح باهمال الحدود العليا في مفكوك ذات الحدين ) .

يلاحظ المراقب الثابت في إطار الأثير ان الشعاع 2 يعود الى الصفيحة P بعد انعكاسه على المرآة  $M_2$  عبر المسار المماس الزاوي ( المائل )  $PM'_2P$  . لنفرض ان زمن رحلة هذا الشعاع خلال هذا المسار هي  $t_{\perp}$  ، وخلال هذا الزمن تتحرك الصفيحة P مسافة  $PP' = vt_{\perp}$  . بالرجوع للشكل (1.3.1) ، نجد ان

$$PM'_2{}^2 = PO^2 + OM'_2{}^2$$

او

$$(ct_{\perp}/2)^2 = (vt_{\perp}/2)^2 + l^2$$

وبحل هذه المعادلة واستخدام التقريب في مفكوك ذات الحدين ( اعتبار فقط حدين من المفكوك فقط ) ، نحصل على التالي

$$t_{\perp} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad \dots(1.3.2)$$

كما يكون الفرق في الزمن الذي يستغرقه الشعاعين لقطع هذه الرحلة ذهابا وإيابا كما يلي

$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} = \frac{2l}{c} \frac{v^2}{2c^2} \quad \dots(1.3.3)$$

كما يكون فرق المسار بين هذين الشعاعين كالتالي

$$\Delta x = c \Delta t = \frac{lv^2}{c^2}$$

الآن اذا تم تدوير كل الجهاز بزاوية  $90^0$  ، تتبدل مسارات هذين الشعاعين . ويسبب الدوران تغيرا في فرق المسار مساويا للمقدار

$$(\Delta x)_{\text{tot}} = \frac{2lv^2}{c^2} \quad \dots(1.3.4)$$

حيث ان تغير فرق المسار بمقدار  $\lambda$  ينتج وحدة واحدة من انزياح الهدب ، لذلك يكون مقدار الإنزياح الكلي الناجم عن حركة الجهاز الدورانية هو



$$\Delta n = \frac{2lv^2}{\lambda c^2} \quad \dots(1.3.5)$$

لتوضيح هذا التحليل رقميا ، نورد نتائج التجربة التالية :

باستخدام تقنية الإنعكاسات المتعددة ، استطاع ميكلسون و مورلي جعل قيمة  $l$  تعادل  $11.0 \text{ m}$  ، واستخدم ضوء بطول موجة  $\lambda = 5900 \text{ \AA}$  ،  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  ،  $v = 3 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  . عند التعويض بهذه القيم في معادلة (1.3.5) ، نحصل على

$$\Delta n = \frac{2 \times 11 \text{ m} \times (3 \times 10^4 \text{ m/s})^2}{5.9 \times 10^{-7} \text{ m} \times (3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 0.37$$

مع ان هذا الجهاز قادرا على قياس انزياح الأهداب بحدود 0.01 ، لكن لم يلاحظ اي انزياح للأهداب نتيجة لتدوير الجهاز كما هو متوقعا في التحليل الرياضي لهذه التجربة . ولمزيد من الدقة اجريت هذه التجربة عدة مرات على مدار الأيام خلال فصول السنة المختلفة وكانت النتيجة سلبية *null* ، وهذه النتيجة السلبية للتجربة أفضت الى وجود متناقضات في قوانين نسبية غاليلو بخصوص جمع السرعة . كما تظهر تجربة ميكلسون و مورلي ان جميع الأطر الخاملة تكون متكافئة في وصف الظواهر الفيزيائية .

#### (1.4) النظرية النسبية الخاصة *The Special Theory of Relativity*

بعد التحليل المعمق لنتائج الفيزياء النظرية والتجريبية ، خاصة في الديناميكا الكهربائية ، توصل العالم أينشتين (1879-1955) الى خلاصة ان مفاهيم المكان والزمان التي تستند عليها الفيزياء الكلاسيكية غير صحيحة . وادرك ان العلاقات النيوتنية للزمان والمكان المستنبطة من ملاحظة حركة الأجسام المادية تكون صحيحة في حالة تحرك هذه الأجسام بسرعة صغيرة جدا بالنسبة لسرعة الضوء ، ولكن لا تكون هذه العلاقات صحيحة في حالة الحركة بسرعة قريبة من سرعة الضوء . وفي عام 1905 نشر أينشتين بحثا يتعلق بالديناميكا الكهربائية للأجسام المتحركة ، وبذلك خلق ما يعرف بالنظرية النسبية الخاصة ، والتي هي اساس الفيزياء النظرية للمكان والزمان . وتستند هذه النظرية على فرضيتين اساسيتين، واللتين اكدتهما التجارب العملية ، وهما:

تنص **الفرضية الأولى** على ان قوانين الفيزياء يمكن التعبير عنها بمعادلات تأخذ نفس الصيغة الرياضية بالنسبة لجميع الأطر المتحركة بسرعات ثابتة بالنسبة لبعضها البعض . وتعتبر هذه الفرضية عن عدم وجود اطار كوني متميز. اذ لو اخذت قوانين الفيزياء اشكالا مختلفة بالنسبة لأطر تتحرك بحركة نسبية فيما بينها ، لتمكنا من اختلاف هذه الصيغ ان نحدد اي اطار هو ثابت في الفضاء وأيها في حالة حركة . ان عدم وجود اطار كوني متميز يعني انه لا يمكن ان يكون هناك اي تباين ما بين المراجع المختلفة . ومن هذه الصفة بالذات تولدت هذه الفرضية . وعليه ، ترفض هذه الفرضية فكرة **المكان المطلق** *absolute space* و**الحركة المطلقة** *absolute motion* .

وتتنص **الفرضية الثانية** للنسبية الخاصة على ان سرعة الضوء في الفراغ لها نفس القيمة بالنسبة لكل الأطر بغض النظر عن سرعتها النسبية . وجاءت هذه الفرضية مباشرة من نتائج تجربة ميكلسون ومورلي ونتائج تجارب علماء آخرين .

وقد ادت هاتان الفرضيتان الى نتائج مهمة قد لا تبدو منسجمة بل قد تتعارض مع الإحساس الإدراكي المألوف . وملخص القول ان في ميكانيكا نيوتن تم افتراض ان المكان والزمان يكونان مطلقان ولا يعتمد احدهما على الأخر ، بينما ، وفقا للنظرية النسبية الخاصة فإن مفاهيم المكان والزمان غير مطلقة ويعتمدان على حالة الحركة ، ولا يمكن فصل احدهما عن الآخر .

ولربط الملاحظات التي تجرى في الأطر المرجعية المختلفة ، يلزم وجود معادلات تحويلية ، التي تكون متوافقة مع فرضيات النظرية النسبية الخاصة ، غير تحويلات غاليليو المتعارضة مع فرضية اينشتين الثانية . بما ان تحويلات غاليليو تغير الصيغ الرياضية لمعادلات ماكسويل عند الإنتقال من اطار خامل ال اطار آخر ، اقترح العالم لورنس ( 1853-1928 ) تحويلات رياضية عرفت بإسمه ( كما سيرد شرحه في البند اللاحق) .

### (1.5) تحويلات لورنس *Lorentz Transformations*

اعتمادا على فرضيات النظرية النسبية الخاصة ، اشتق لورنس مجموعة من معادلات تربط بين إحداثيات المكان- الزمان لحادثة ما مقاسة في اطارين متمائلين وفي حالة حركة نسبية . لنعبر الإطارين المتمائلين  $S, S'$  بحيث تكون محاورهما المتقابلة متوازية ويتحرك الإطار المؤشر عليه بسرعة  $v$  في الاتجاه المشترك  $x - x'$  . كما ان لكل اطار يوجد مراقب خاص به مزودا بمقياس طول وساعة توقيت. لنفرض ان هذان المراقبان ضبطا ساعتيهما عند  $t = 0 = t'$  عندما كانت نقطتا اصل الإطارين منطبقتين على بعضهما البعض .

لنفرض ان المراقب في الإطار  $S$  سجل احداثيات المكان – الزمان لجسيم ما كالتالي:  $x, y, z, t$  ، بينما سجل المراقب في الإطار  $S'$  كالتالي :  $x', y', z', t'$  . الآن نبحث عن علاقة رياضية بالشكل التالي:

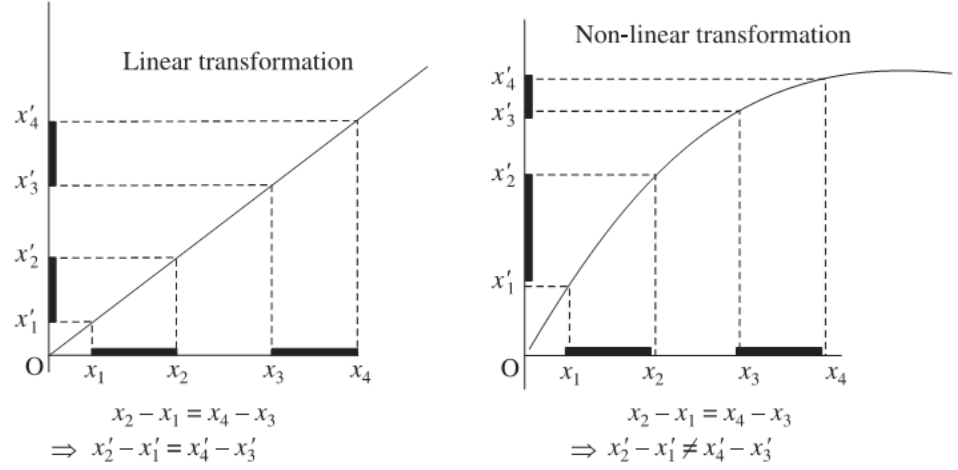
$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, z, t), \\ y' &= f_2(x, y, z, t), \\ z' &= f_3(x, y, z, t), \\ t' &= f_4(x, y, z, t) \end{aligned} \quad \dots(1.5.1)$$

بما ان حركة الإطارين النسبية في اتجاه محور  $x$  ، لذلك تبقى الإحداثيات  $y, z$  دون تغيير ، او

$$y' = y, \quad z' = z \quad \dots(1.5.2)$$

اضافة الى فرضيات النظرية النسبية الخاصة ، نفترض ان المكان والزمان يكونان متجانسين ومتماثلين المناحي . هذا يعني ان فترة الطول في اي اطار تكون غير معتمدة على الموقع الذي تقاس فيه . ايضا ، تكون الفترة

الزمنية غير معتمدة على اللحظة التي تقاس فيها . رياضيا ، يحقق التحويل الخطي *linear transformation* هذا المعيار . يبين الشكل (1.5.1) كلا من التحويل الخطي واللاخطي *non-linear transformation* .



شكل (1.5.1) التحويل الخطي والتحويل اللاخطي .

لنفرض ان قضيبا بطول  $l$  موضوعا على محور  $x$  ، حيث احداثيات طرفيه في الإطار  $S$  هما :  $x_1, x_2$  . باستخدام التحويل الخطي ، يصبح طوله  $l'$  واحداثيات طرفيه هما :  $x'_1, x'_2$  في الإطار  $S'$  . عند وضع نفس القضيب بين النقطتين  $x_3, x_4$  في الإطار  $S$  ، فإن طوله يتحول الى  $l'$  وتصبح احداثيات طرفيه ،  $x'_3, x'_4$  . وعليه ، يضمن التحويل الخطي ما يلي : اذا كان  $x_1 - x_2 = x_4 - x_3 = l$  فإن  $x'_1 - x'_2 = x'_3 - x'_4 = l$  . وتكون هذه العلاقات غير صحيحة في حالة التحويل اللاخطي ( لاحظ الشكل 1.5.1).

وبناء عليه ، يلزم ان يكون التحويل خطيا ويمكن كتابة معادلات التحويل السابقة على الصورة التالية :

$$\begin{aligned}
 x' &= a_{11}x + a_{12}t \\
 y' &= y \\
 z' &= z \\
 t' &= a_{21}x + a_{22}t
 \end{aligned}
 \quad \dots(1.5.3)$$

حيث تكون المعاملات  $a's$  ثابتة .

اذا تحرك الجسم مسافة  $dx$  على محور  $x$  في زمن  $dt$  في الإطار  $S$  ، فإن المسافة والزمن المقابلين في الإطار  $S'$  يكونان كما يلي :

$$dx' = a_{11} dx + a_{12} dt \quad \dots(1.5.4)$$

$$dt' = a_{21} dx + a_{22} dt \quad \dots(1.5.5)$$

كما تكون سرعة هذا الجسم في الإطار  $S$  و  $S'$  كالتالي

$$u = dx/dt, \quad u' = dx'/dt' \quad \dots(1.5.6)$$

بقسمة معادلة (1.5.4) على معادلة (1.5.5) نحصل على

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{a_{11}dx + a_{12}dt}{a_{21}dx + a_{22}dt} = \frac{a_{11}(dx/dt) + a_{12}}{a_{21}(dx/dt) + a_{22}}$$

أو

$$u' = \frac{a_{11}u + a_{12}}{a_{21}u + a_{22}} \quad \dots(1.5.7)$$

لإيجاد الثوابت  $a_{22}, a_{21}, a_{12}, a_{11}$  نتبع الخطوات التالية

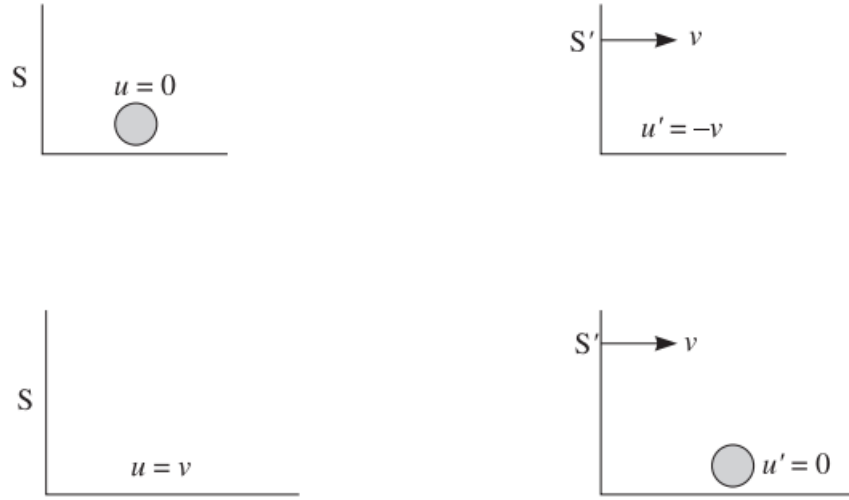
(i) نفرض ان الجسم يكون ساكنا في الإطار  $S$  ، وعليه تصبح  $u = 0$  ،  $u' = -v$  . بتعويض هذه القيم في معادلة (1.5.7) نجد ان

$$-v = \frac{a_{12}}{a_{22}} \quad \therefore a_{12} = -a_{22}v \quad \dots(1.5.8)$$

(ii) اذا كان الجسم ساكنا في الإطار  $S'$  فإن  $u' = 0$  ،  $u = v$  . بتعويض هذه القيم في معادلة (1.5.7) نحصل على التالي

$$0 = \frac{a_{11}v + a_{12}}{a_{21}v + a_{22}} \quad \therefore a_{12} = -a_{11}v = -a_{22}v \Rightarrow a_{11} = a_{22} \quad \dots(1.5.9)$$

يبين الشكل (1.5.2) سرعة الجسم كما يلاحظها المراقب في الإطارين المتحركين بسرعة نسبية .



شكل (1.5.2) سرعة الجسم في الإطارين كما يلاحظها المراقب .

(iii) بدلا من ملاحظة الجسم ، نترض ان المراقب يلاحظ فوتونا (ومضة ضوئية) . وفقا للفرضية الثانية في النظرية النسبية ( ثبات سرعة الضوء في الفراغ) يجد المراقبان في الإطارين ان سرعة الفوتون متساوية ، اي :  $u = u' = c$  . لذلك من معادلة (1.5.7) ، نحصل على ما يلي

$$c = \frac{a_{11}c + a_{12}}{a_{21}c + a_{22}} = \frac{a_{11}c - a_{11}v}{a_{21}c + a_{11}}$$

$$a_{21} = -\frac{v}{c^2} a_{11} \quad \dots(1.5.10)$$

بتعويض قيم الثوابت  $a_{12}, a_{22}, a_{21}$  في معادلة (1.5.3) ، نجد ان

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11} (x - vt) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= a_{11} (t - vx/c^2) \quad \dots(1.5.11)
\end{aligned}$$

(iv) وفقا للفرضية الأولى في النظرية النسبية الخاصة يكون كلا من الإطارين  $S, S'$  ملائمة وبالتساوي لوصف الظواهر الفيزيائية. بالنسبة للإطار  $S$  ، يكون الإطار  $S'$  متحركاً بسرعة  $-v$  ، لذلك يجب ان يبدو التحويل العكسي كالتالي

$$\begin{aligned}
x &= a_{11} (x' + vt') \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= a_{11} (t' + vx'/c^2) \quad \dots(1.5.12)
\end{aligned}$$

بتعويض قيم  $x', t'$  من المعادلة (1.5.11) في معادلة (1.5.12) ، نجد ان

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \dots(1.5.13)$$

عند تعويض قيم  $a_{11}$  في معادلة (1.5.11) و معادلة (1.5.12) ، نجد ان تحويل لورنس يؤول الى التالي

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \dots(1.5.14)$$

ونحصل على التحويل العكسي بالتبديل التناوبي بين الأحداثيات المؤشر عليها وغير المؤشر وإستبدال  $v \rightarrow -v$  ، وعليه ، نجد ان

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \dots(1.5.15)$$

ومن السهل التعبير عن تحويل لورنس بدلالة  $\beta = v/c$  ، و  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  ، وهذا ما يبينه الجدول التالي

Lorentz Transformation	Inverse Transformation
$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - \beta ct)$	$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x' + \beta ct')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t - \beta x/c)$	$t = \frac{t' + \beta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(t' + \beta x'/c)$

من الملاحظ ان تحويل لورنس يؤول الى تحويل غاليليو في حالة السرعة المنخفضة ( $\beta = v/c \rightarrow 0$ ). كذلك عندما تكون  $v > c$  ، فإن تحويل لورنس لإحداثيات  $x, t$  تصبح كميات تخيلية *imaginary* وهذا يعني ان الحركة بسرعة اكبر من سرعة الضوء تكون مستحيلة . ونلاحظ في تحويل لورنس ان معادلة تحويل الزمن تحوي على الأحداثي المكاني ، والذي يدل على ان المكان والزمان لا يمكن الفصل بينهما *inseparable* ، اي لا يمكن الحديث عنهما بإنفراد وانما بشكل موحد عند حدوث الظاهرة الفيزيائية .

### (1.6) تحويل السرعة Velocity Transformation

لنفرض ان اطارا خاملا  $S'$  متحركا بسرعة  $v$  بالنسبة لإطار  $S$  عبر الإتجاه المشترك لكلا الأطارين  $x - x'$  . ولتكن الإحداثيات المكانية – الزمانية لجسيم ما المقاسة بواسطة المراقبين في الأطارين  $S, S'$  هي  $(x, y, z, t), (x', y', z', t')$  على الترتيب . على فرض ان هذا الجسيم تحرك مسافة  $ds$  في زمن  $dt$  في الإطار  $S$  ، فيمكن الحصول على المعادلات المقابلة التي يقيسها المراقب  $S'$  بإشتقاق معادلات تحويل لورنس كما يلي :

$$x' = \gamma (x - vt), y' = y, z' = z$$

$$t' = \gamma (t - vx/c^2)$$

من هذه المعدلات ، نحصل على التالي

$$dx' = \gamma (dx - vdt), dy' = dy, dz' = dz \quad \dots(1.6.1)$$

$$dt' = \gamma (dt - vdx/c^2) \quad \dots(1.6.2)$$

بقسمة معادلة (1.6.1) على معادلة (1.6.2) ، نحصل على

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{(dx/dt) - v}{1 - (v/c^2)(dx/dt)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \quad \dots(1.6.3)$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{(dy/dt)}{\gamma(1 - (v/c^2)dx/dt)}$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \quad \dots(1.6.4)$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{(dz/dt)}{\gamma(1 - (v/c^2)dx/dt)}$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \quad \dots(1.6.5)$$

كما تكون معادلات التحويل العكسي للسرعة كما يلي

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + vu'_x/c^2} \quad \dots(1.6.6)$$

عند تطبيق معادلة التحويل على سرعة الضوء ، فإذا تحرك الفوتون بسرعة  $u_x = c$  في الإطار  $S$  فإن سرعته في الإطار  $S'$  تكون كما يلي

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = c$$

من السهل ملاحظة ان قوانين التحويل النسبية للسرعة تؤول الى تحويلات غاليليو عند النهاية  $\beta = v/c \rightarrow 0$ .



## (1.7) التزامنية (التوافقية) Simultaneity

في النسبية ، تكون فكرة التزامنية غير مطلقة . بمعنى ان وقوع حدثين أنيا في اطار خامل لا يكون ، في العموم، أنيا في الإطار الآخر. في الإطار  $S$  ، نفرض ان الحدث 1 حصل عند النقطة  $(x_1, y_1, z_1)$  عند الزمن  $t_1$  وان الحدث 2 حصل عند النقطة  $(x_2, y_2, z_2)$  عند الزمن  $t_2$  . باستخدام تحويل لورنس ، تكون الأحداث المكانية – الزمانية لهذين الحدثين المقاسة بالمراقب في الإطار  $S'$  المتحرك بسرعة نسبية  $v$  ( كما سبق شرحه) كما يلي :

$$\begin{aligned}x'_1 &= \gamma (x_1 - vt_1), & x'_2 &= \gamma (x_2 - vt_2) \\t'_1 &= \gamma (t_1 - vx_1/c^2), & t'_2 &= \gamma (t_2 - vx_2/c^2)\end{aligned}$$

وعليه ، يكون الفرق بين الإحداثيات المكانية والزمانية كما تقاس في الإطار  $S'$  كالتالي

$$x'_2 - x'_1 = \gamma\{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\} \quad \dots(1.7.1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\{(t_2 - t_1) - (v/c^2)(x_2 - x_1)\} \quad \dots(1.7.2)$$

تعطي معادلة (1.7.2) الفترة الزمنية بين الحدثين كما يقيسها المراقب في الإطار  $S'$  . من الواضح انه اذا كان الحدثان متزامنين ( اي ،  $t_2 - t_1 = 0$  ) فإنهما لا يكونان متزامنين ( $t'_2 - t'_1 \neq 0$ ) في الإطار  $S'$  ، حيث ،

$$t'_2 - t'_1 = -(\gamma v/c^2)(x_2 - x_1) \quad \dots(1.7.3)$$

من هنا نلاحظ ما يلي :

(1) يكون الحدثان متزامنين في الإطار  $S'$  اذا وقعا عند نفس النقطة ( $x_2 - x_1 = 0$ ) ، وعليه تكون التزامنية مجرد فكرة نسبية .

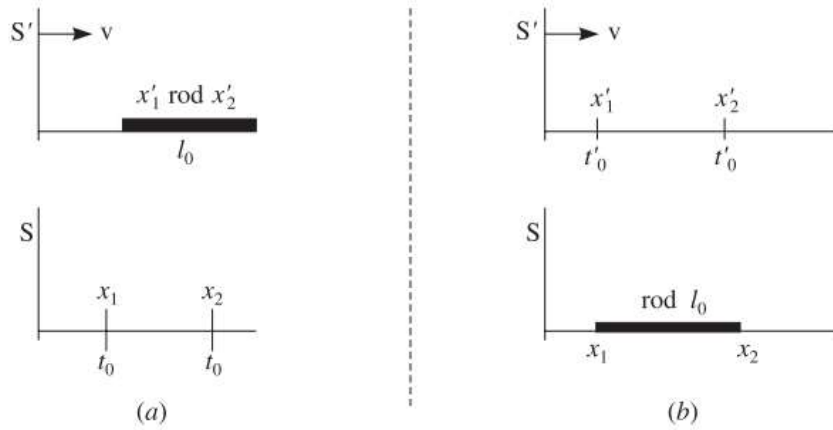
(2) اذا كان  $t'_2 - t'_1 > 0$  فإن وقوع الحدثين في الإطار  $S'$  يكون بنفس التتابع الحاصل في الإطار  $S$  .

(3) اما اذا كان  $t'_2 - t'_1 < 0$  فإن وقوع الحدثين في الإطار  $S'$  يكون في عكس التتابع الحاصل في الإطار  $S$  .

من المهم التنويه الى ان التزامنية النسبية تتبع محدودية سرعة الضوء ، فمثلا اذا اقتربت سرعة الضوء من مالانهاية  $c \rightarrow \infty$  ( الفرضية الكلاسيكية ) ، تكون التزامنية مفهوم مطلق ، اي  $t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$  .

## (1.8) إنكماش لورنس Lorentz Contraction

تعرف ظاهرة انكماش لورنس كما يلي : يبدو الجسم المتحرك منكشما عند مراقبته في اتجاه حركته . ولتوضيح ذلك ، نفرض ان قضيبا موضوعا على محور  $x'$  وساكننا بالنسبة للإطار  $S'$  . وكان طول هذا القضيب في هذا الإطار هو  $\ell_0 = x'_2 - x'_1$  حيث  $x'_1$  و  $x'_2$  هما احداثيات نهايتي القضيب . يسمى الطول  $\ell_0$  بالطول الحقيقي *proper length* للقضيب . الآن لنفرض ان الأطار  $S'$  يتحرك بسرعة نسبية  $v$  في اتجاه  $x - x'$  ( الشكل 1.8.1a). لإيجاد طول القضيب في الإطار  $S$  ، يجب ملاحظة احداثيات نهايتيه  $x_1, x_2$  في نفس اللحظة الزمنية  $(t_0)$  .



شكل (1.8.1) تحويل الطول .

من تحويل لورنس ، نحصل على

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_0) \cdot \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt_0)$$

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

حيث :  $\ell = x_2 - x_1$  وهذا يساوي طول القضيب في الإطار  $S$  . وعليه ،

$$l = (l_0/\gamma) = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad \dots(1.8.1)$$

تبين هذه المعادلة ان  $\ell < \ell_0$  ، اي ان طول القضيب المتحرك يكون متقلصا *contracted* .

اما اذا وضع هذا القضيب في الإطار  $S$  فإن طوله الحقيقي يكون  $l_0 = x_2 - x_1$  ( الشكل 1.8.1b ) ، ويكون طوله في الإطار  $S'$  يساوي الفرق بين احداثيات نهايتيه  $x'_1$  ،  $x'_2$  المقاستين في نفس اللحظة الزمنية  $(t'_0)$  . اي ،

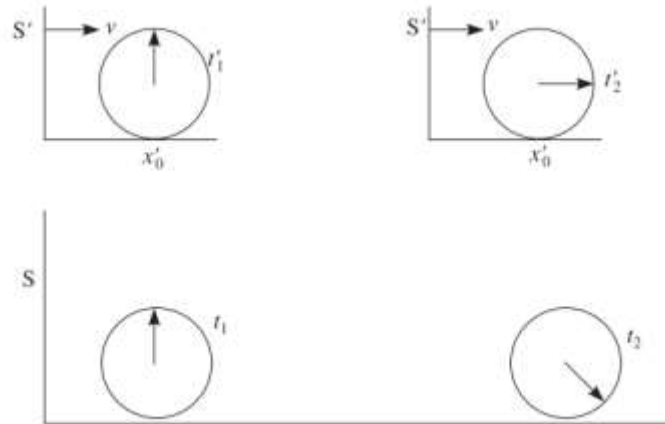
$$l_0 = x_2 - x_1 = \gamma\{(x'_2 + vt'_0) - (x'_1 + vt'_0)\} = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma l$$

$$l = l_0 / \gamma = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

اي ان تقلص الطول يكون مقلوبا *reciprocal* . وهكذا يبدو ان طول القضيب منكمشا في كلا الإطارين بالنسبة للمراقب في الإطار الآخر .

### (1.9) تمدد الزمن *Time Dilation*

وفقا للنظرية النسبية ليس هناك زمنا عالميا *universal time* ، اذ يعتمد معدل سريان الزمن فعليا على حالة حركة المراقب . لنرى كيف ترتبط الفترة الزمنية بين حدثين والمقاسة في إطار خامل ما مع تلك التي تقاس في إطار خامل آخر ، الذي يتحرك بسرعة بالنسبة للإطار الأول ( الشكل 1.9.1 ) .



شكل (1.9.1) تحويل فترة الزمن .

لنفرض ان حدث 1 يحدث عند النقطة  $x'_0$  وفي اللحظة  $t'_1$  في الإطار  $S'$  وحدث 2 يحدث عند نفس النقطة ولكن في اللحظة  $t'_2$  . تكون الفترة بين الحدثين تساوي  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$  . تقاس الفترة الزمنية بساعة منفردة موضوعة عند نقطة وقوع الحدثين وتسمى بفترة الزمن الحقيقي *proper time interval* ويرمز لها بالرمز  $\Delta \tau$  . ويلاحظ نفس الحدثين في الإطار المرجعي  $S$  الذي يتحرك بالنسبة له الإطار  $S'$  بسرعة  $v$  . نفرض ان  $t_2, t_1$  يمثلان زمن حدوث نفس الحدثين والمسجلان بالساعة في الإطار  $S$  . بالطبع ستسجل هذه

الأزمنة بالساعات *clocks* الموضوعه عند نقاط مختلفة . تسمى الفترة الزمنية  $\Delta t = t_2 - t_1$  في الإطار *S* بالفترة غير الحقيقية *improper time interval* . من تحويلات لورنس تكون العلاقة بين الفترات الزمنية كما يلي

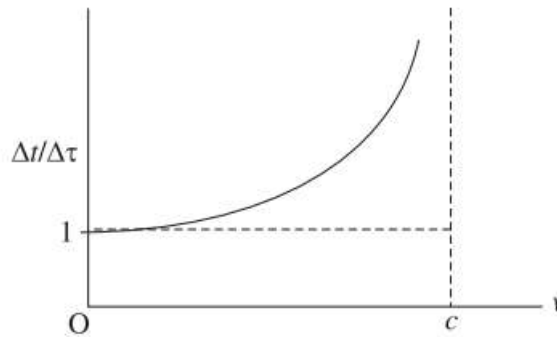
$$t_1 = \gamma(t'_1 + vx'_0/c^2), \quad t_2 = \gamma(t'_2 + vx'_0/c^2)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau$$

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v/c \quad \dots(1.9.1)$$

وهكذا تختلف الفترة الزمنية بين حدثين في الإطارات الخاملة ، التي تكون في حركة نسبية . وتكون الفترة الزمنية هي الأقل في اطار المرجع الذي يحصل فيه الحدثين عند نفس النقطة ولذلك تسجل على نفس الساعة. بما ان الزمن غير الحقيقي يكون اكبر من الزمن الحقيقي ، لذلك تبدو الساعة المتحركة متباطئة *go slow* ، وتعرف هذه بظاهرة تمدد الزمن . يبين الشكل (1.9.2) اختلاف  $\Delta t$  مع السرعة  $v$  .



شكل (1.9.2) تمدد الزمن .

(1.10) التحقق التجريبي لتقلص الطول وتمدد الزمن :

### **Experimental Verification of Length contraction and Time Dilation**

حديثا ، تم التحقق التجريبي المباشر لنتائج النظرية النسبية الخاصة من خلال عدة ظواهر في الجسيمات. وكمثال على ذلك ظاهرة انحلال الميزونات *mesons decay* وهي من الجسيمات الأولية غير المستقرة التي تنحل الى الكترون ونيوترينو . ويكون معدل فترة الحياه لها في الإطار الذي تكون مستقرة ( في حالة سكون) فيه يساوي  $2\mu s$  . كما تتكون الميزونات في طبقات الجو العليا لاعلى ارتفاع يقع ضمن المدى

[5 – 6km] بواسطة الجسيمات السريعة للأشعة الكونية *cosmic ray* القاجمة من الفضاء الخارجي،  
وتصل مستوى سطح البحر بصورة غزيرة بسرعة  $v = 0.998 c$ .

تظهر الحسابات الكلاسيكية الى ان هذه الميزونات تتحرك مسافة خلال فترة حياتها ( قبل انحلالها ) قدرها  
كما يلي

$$d = v t = (3 \times 10^8 \text{ m/s}) (2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 600 \text{ m}$$

بينما في الحقيقة تتكون هذه الجسيمات على ارتفاع اكبر من عشر مرات بقدر هذه المسافة . نستطيع حل هذه  
المعضلة *paradox* بإستخدام نتائج النظرية النسبية الخاصة . لندرس المسألة بالنسبة الى اطار الميزون نفسه  
حيث معدل عمر الميزون في هذا الإطار يساوي  $2 \mu\text{s}$  . في اطار المعمل ، يكون عمر الميزون يساوي  $t =$   
 $d = vt =$  مسافة تساوي  $\frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = 31.7 \mu\text{s}$  ، وخلال هذا الزمن يتحرك الميزون مسافة تساوي  $d = vt =$   
 $(0.998c)(31.7 \mu\text{s}) = 9.5 \text{ km}$  . هذا يعني ان الميزون يستطيع الوصول الى سطح البحر في فترة  
حياته ( قبل الإنحلال). وتبرهن هذه الظاهرة صحة تمدد الزمن في النظرية النسبية الخاصة ، اي من وجهة  
نظر المشاهد على الأرض ، يكون عمر الميزون تقريبا 16 مرة اكبر من عمره في حالة السكون.

كما يمكن الوصول الى نفس النتيجة بإعتبار قانون تقلص الطول . في اطار الميزون تبدو المسافة بين موقع  
تولد هذا الميزون و سطح البحر متقلصة بالمقدار التالي

$$d = d_0 \sqrt{1 - \beta^2} = (600 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.998)^2} = 379 \text{ m}$$

ويكون الزمن اللازم لقطع هذه المسافة كالتالي

$$t = d/v = 379 \text{ m} / (0.998 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1.26 \mu\text{s}.$$

وهذا الزمن اقل من الزمن الحقيقي للميزون ( عمر الميزون ) .

### (1.11) الفترة Interval

يتميز الحدث في إطار ما بإحداثيات المكان والزمان . لنفرض حصول الحدث 1 عند النقطة  $(x_1, y_1, z_1; t_1)$   
، وحصول حدث 2 عند النقطة  $(x_2, y_2, z_2; t_2)$  . يمكن تعريف الكمية التالية

$$s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \quad \dots(1.11.1)$$

وتسمى بالفترة بين الحدثين . اذا كان الحدثين متناهيين في القرب بينهما ، تعرف هذه الفترة بالمقدار

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \dots(1.11.2)$$

وتكون هذه الفترة في الإطار  $S'$  على الصورة التالية

$$(ds')^2 = c^2(dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 \quad \dots(1.11.3)$$

من خصائص الفترة انها غير متباينة (مختلفة) بالنسبة لتحويل لورنس ، بمعنى

$$ds^2 = ds'^2$$

من تحويل لورنس ، نحصل على التالي

$$dx' = \frac{dx - \beta c dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz \quad \text{and}$$

$$dt' = \frac{dt - (\beta/c) dx}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \dots(1.11.4)$$

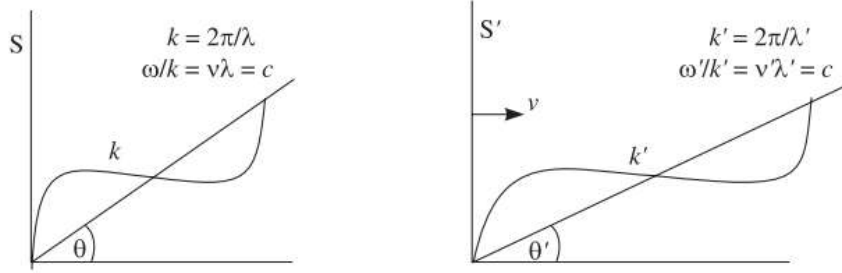
وبتعويض هذه المقادير في معادلة (1.11.3) ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} (ds')^2 &= c^2 \frac{\{dt - (\beta/c) dx\}^2}{1 - \beta^2} - \frac{(dx - \beta c dt)^2}{1 - \beta^2} - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= ds^2 \end{aligned}$$

## (1.12) ظاهرة دوبلر *Doppler's Effect*

يعرف التغير الظاهري في تردد موجة ما بسبب الحركة النسبية بين مصدر هذه الموجة والمراقب الذي يستقبلها **ظاهرة دوبلر** . لنفرض ان مصدر احادي اللون موضوعا عند نقطة اصل الإطار  $S'$  ويبعث

موجة في المستوى  $xy$  في اتجاه يصنع زاوية  $\theta'$  مع محور  $x'$  (الشكل 1.12.1)



شكل (1.12.1) ظاهرة دوبلر

يكون حل معادلة الموجة في الإطار  $S'$  كالتالي

$$\psi' = a' \cos[\omega' t' - k'_x x' - k'_y y']$$

حيث

$$k'_x = k' \cos \theta', \quad k'_y = k' \sin \theta', \quad k' = \frac{2\pi}{\lambda'}$$

اذن

$$\psi' = a' \cos[\omega' t' - k' x' \cos \theta' - k' y' \sin \theta'] \quad \dots(1.12.1)$$

بينما يكون حل معادلة الموجة في الإطار  $S$  كما يلي

$$\psi = a \cos[\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta] \quad \dots(1.12.2)$$

ويكون طور الموجة كمية غير متباينة ، بمعنى  $\varphi = \varphi'$  .

عند الانتقال من الإطار  $S'$  الى الإطار  $S$ ، يصبح طور الموجة (1.12.1) كما يلي

$$\begin{aligned}\varphi &= [\omega' \gamma (t - vx/c^2) - k' \gamma (x - vt) \cos \theta' - k' y \sin \theta'] \\ &= \left[ \gamma (\omega' + k' v \cos \theta') t - \gamma \left( \frac{\omega' v}{c^2} + k' \cos \theta' \right) x - k' y \sin \theta' \right] \dots (1.12.3)\end{aligned}$$

بمقارنة معادلة (1.12.3) مع طور الموجة (1.12.2) ، نجد ان

$$\omega = \gamma (\omega' + k' v \cos \theta') \dots (1.12.4)$$

$$k \cos \theta = \gamma \left( \omega' \frac{v}{c^2} + k' \cos \theta' \right)$$

أو ،

$$k \cos \theta = \gamma (k' \beta + k' \cos \theta') \dots (1.12.5)$$

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' \dots (1.12.6)$$

تعطي المعادلة الأولى (1.12.5) ظاهرة دوبلر . حيث ان  $k' = \omega' / c$  ، يمكن تحويل معادلة (1.12.4) الى صورة سهلة كما يلي :

$$\omega = \gamma \left( \omega' + \frac{\omega'}{c} v \cos \theta' \right)$$

أو

$$\omega = \gamma (1 + \beta \cos \theta') \omega' \dots (1.12.7)$$

يكون التحويل العكسي لمعادلة (1.12.7) كالتالي

$$\omega' = \gamma (1 - \beta \cos \theta) \omega \dots (1.12.8)$$

اذن

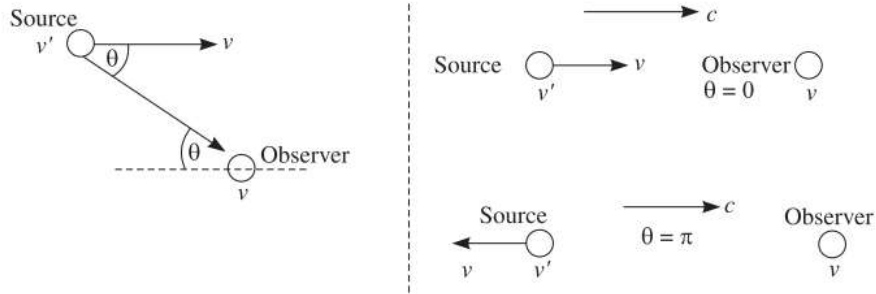
$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)} = \frac{\omega' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}$$

أو



$$v = v' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta} \quad \dots(1.12.9)$$

تعطي معادلة (1.12.9) انزياح دوبلر النسبي *relativistic Doppler shift* . حيث  $v$  يمثل التردد الملاحظ ، وتمثل  $v'$  التردد الحقيقي .  
يوضح الشكل (1.12.2) الحالات المختلفة لإتجاه حركة المراقب بالنسبة للمصدر .



شكل (1.12.2) ظاهرة دوبلر النسبية .

لندرس حالات الحركة النسبية للمراقب ،

(1) اذا كانت  $\theta = 0$  (سرعة المصدر في اتجاه سرعة الضوء) ، فإن معادلة (1.12.9) تؤول الى التالي

$$v = v' \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = v' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \dots(1.12.10)$$

هكذا يكون التردد الملاحظ ( الظاهري) اكبر من التردد الحقيقي ، اي  $v > v'$  .

(2) اذا كانت  $\theta = \pi$  (يكون اتجاه سرعة المصدر مضادا للإتجاه سرعة الضوء) ، فإن معادلة (1.12.9) تؤول الى التالي

$$v = v' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \dots(1.12.11)$$

يكون في هذه الحالة التردد الملاحظ اقل من التردد الحقيقي ، اي  $v < v'$  .

(3) في حالة  $\theta = \pi/2$  ، تكون السرعة النسبية بين المصدر والمراقب صفرا . مع ذلك ، حتى اذا لم يكن هناك انزياح في التردد: يختلف التردد الظاهري عن التردد الحقيقي بعامل يساوي  $\sqrt{1-\beta^2}$  . وهذا يعرف

بظاهرة دوبلر المستعرضة *transverse Doppler effect* . في هذه الحالة يكون التردد الملاحظ اقل دائما من التردد الحقيقي.

### • ظاهرة دوبلر الكلاسيكية

عند الإحتفاظ بحدود الرتبة الأولى للمقدار  $\beta$  في مفكوك الجذر التربيعي  $\sqrt{1 - \beta^2}$  لعلاقة انزياح دوبلر النسبي ( معادلة 1.12.9 ) ، نحصل على ظاهرة دوبلر الكلاسيكية . وتكون هكذا

$$v = \frac{v' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \xrightarrow{\text{neglecting } \beta^2} \frac{v'}{1 - \beta \cos \theta} = v'(1 + \beta \cos \theta) \quad \dots(1.12.12)$$

عند  $\theta = 0$  ، تؤول هذه المعادلة الى

$$v = v'(1 + \beta) \quad \text{or} \quad \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} = -\frac{v}{c} \quad (\text{violet shift}) \quad \dots(1.12.13)$$

وتمثل هذه المعادلة الانزياح نحو البنفسجي *violet shift* .

عند  $\theta = \pi$  ، تؤول معادلة (1.12.9) الى

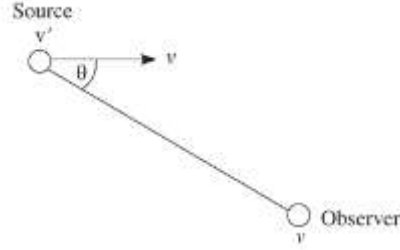
$$v = v'(1 - \beta) \quad \text{or} \quad \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} = \frac{v}{c} \quad (\text{red shift}) \quad \dots(1.12.14)$$

تمثل هذه المعادلة انزياح التردد نحو الأحمر *red shift* .

لأي مقدار من الزاوية  $\theta$  ( الشكل 1.12.3 ) ، تكون العلاقة بين التردد الملاحظ والحقيقي كما يلي

$$v = v' \left( \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \right) = v'(1 + \beta \cos \theta)$$

$$\frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \approx 1 + \beta \cos \theta \quad \text{حيث استخدم التقريب :}$$



$$\nu = \nu' \left( \frac{1}{1 - \beta \cos \theta} \right) = \nu' (1 + \beta \cos \theta)$$

شكل (1.12.3) ظاهرة دوبلر الكلاسيكية .

### • زيغان الضوء *Aberration of Light*

بقسمة معادلة (1.12.5) على معادلة (1.12.6) ، نجد ان

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{k' \sin \theta'}{\gamma(k' \beta + k' \cos \theta')} \\ &= \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + \beta} \end{aligned} \quad \dots(1.12.15)$$

كما يكون التحويل العكسي كالتالي

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - \beta} \quad \dots(1.12.16)$$

ترتبط معادلات (1.12.15) ، (1.12.16) اتجاهات انتشار الضوء  $\theta'$  ،  $\theta$  كما تشاهد من اطارين خاملين  $S, S'$  . وهي تمثل المعادلات النسبية لزيغان الضوء .

### (1.13) الميكانيك النسبي *Relativistic Mechanics*

في ميكانيكا نيوتن يعرف الزخم  $p$  ( كمية الحركة ) لجسيم ما بحاصل ضرب كتلته  $m$  مع سرعته  $v$  ، اي

$$p = mv$$

حيث تعتبر الكتلة كمية مستقلة عن سرعة هذا الجسيم . كما تكون قوانين نيوتن غير متباينة بالنسبة لتحويل جاليليو ولكن غير ذلك بالنسبة لتحويل لورنس . وعليه ، اذا عرف الزخم بطريقة كلاسيكية فإن قانون حفظ

الزخم يكون غير متباينا تحت تأثير تحويل غاليليو ولكن غير ذلك تحت تحويل لورنس . ولجعل قانون حفظ الزخم غير متباينا في تحويل لورنس ، يجب اعادة تعريف الزخم .

### (1.14) التعبير النسبي للزخم : تغير الكتلة مع السرعة

#### **Relativistic Expression for Momentum: Variation of Mass with Velocity**

نتناول دراسة حالة التصادم غيرن المرن بين كرتين متماثلتين. في الإطار  $S'$  تقترب الكرتان من بعضهما البعض بسرعة  $u'$  على محور  $x$  وبعد التصادم تلتصق الكرتان معا و تكون هذه الكرة المركبة مستقرة  $rest$  كما هو مبين في الشكل (1.14.1). ويلاحظ نفس التصادم من الإطار  $S$  ، الذي يكون مثبتا مع احد هاتين الكرتين ( الكرة 2). من الواضح ان الإطار  $S'$  يتحرك بسرعة  $v = u'$  بالنسبة للإطار  $S$  . تكون الكرة الثانية ساكنة في الإطار  $S$  . يمكن الحصول على سرعة الكرة الأولى في الإطار  $S$  بواسطة القانون النسبي لجمع السرعة ، اي

$$u = \frac{u' + u'}{1 + u'^2/c^2} = \frac{2u'}{1 + u'^2/c^2} \quad \dots(1.14.1)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة كما يلي

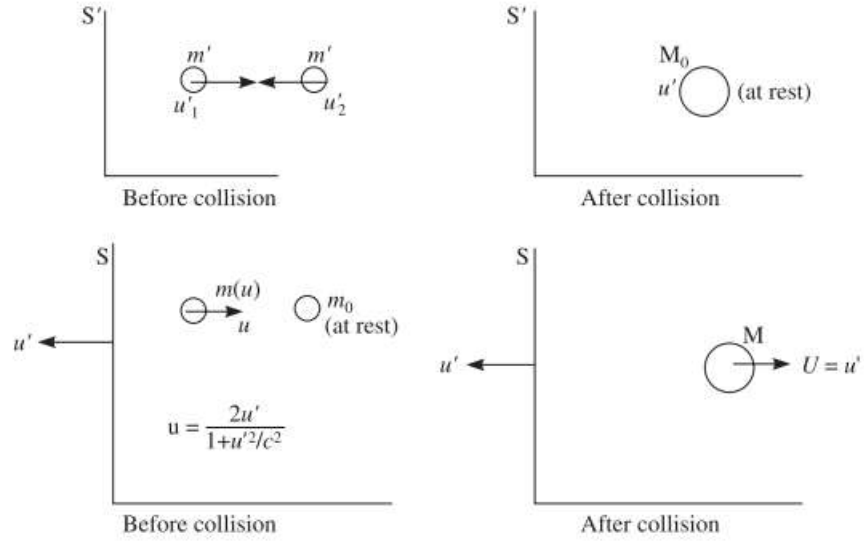
$$u'^2 - \frac{2c^2}{u}u' + c^2 = 0 \quad \dots(1.14.2)$$

يعطي حل هذه المعادلة ما يلي

$$u' = \frac{c^2}{u} \pm \left[ \left( \frac{c^2}{u} \right)^2 - c^2 \right]^{1/2}$$

او

$$u' = \frac{c^2}{u} \pm \frac{c^2}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \dots(1.14.3)$$



شكل (1.14.1) عملية تصادم كرتين متماثلتين كما تشاهد في اطارين خاملين .

في معادلة (1.14.3) نختار الإشارة السالبة لأنها تعطي النتيجة الكلاسيكية  $(u = 2u')$  في نهاية  $u/c \rightarrow 0$ .

وعليه ،

$$u' = \frac{c^2}{u} - \frac{c^2}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad \dots(1.14.4)$$

$$\begin{aligned} u - u' &= u - \left[ \frac{c^2}{u} - \frac{c^2}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2} \right] \\ &= \frac{c^2}{u} \left[ \left( \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) + \sqrt{1 - u^2/c^2} \right] \\ &= \frac{c^2}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - u^2/c^2} \right] \quad \dots(1.14.5) \end{aligned}$$

لنستخدم قانون حفظ الكتلة والزخم في الإطار  $S$  . نفرض ان  $m$  هي كتلة الكرة 1 قبل التصادم . بما ان الكرة 2 ساكنة في هذا الإطار ، نفرض ان كتلتها تساوي  $m_0$  . بعد التصادم تصبح الكرة المركبة مستقرة في الإطار  $S'$  وهكذا تبدو متحركة بسرعة  $u'$  . في الإطار  $S$  ، نحصل على التالي

$$mu = Mu'$$

$$m_0 + m = M$$

بحذف  $M$  من المعادلتين ، نحصل على التالي

$$\frac{m}{m_0} = \frac{u'}{u - u'}$$

باستخدام معادلتني (1.14.4) ، (1.14.5) ، نحصل على

$$\frac{m}{m_0} = \frac{\frac{c^2}{u} \left[ 1 - \sqrt{1 - u^2/c^2} \right]}{\frac{c^2}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2} \left[ 1 - \sqrt{1 - u^2/c^2} \right]} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma m_0 \quad \dots(1.14.6)$$

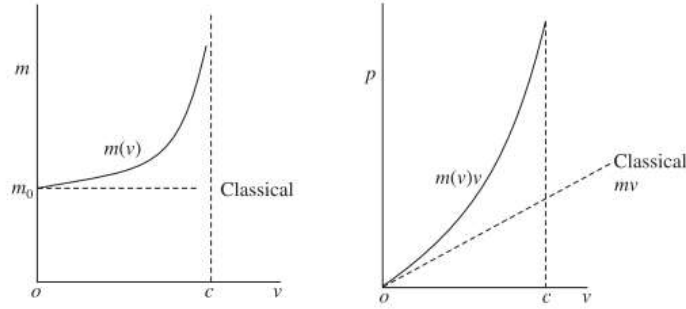
على العموم اذا تحرك جسيم كتلته الساكنة  $m_0$  بسرعة  $v$  بالنسبة لمراقب ، تعطى كتلته النسبية ( المتحركة ) بالعلاقة التالية :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 \quad \dots(1.14.7)$$

تمثل هذه المعادلة الكتلة النسبية للجسيم كدالة لسرعته . وعليه ، نعرف الزخم النسبي كما يلي

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 v \quad (1.14.8)$$

يبين الشكل (1.14.2) العلاقة البيانية لتغير كتلة جسيم مع سرعته ، وكذلك تغير الزخم النيوتني ( الكلاسيكي) والزمخ النسبي مع هذه السرعة .



شكل (1.14.2) تغير كتلة وزخم جسيم مع سرعته.

### (1.15) القانون الأساسي في الديناميكا النسبية *The Fundamental Law of Relativistic Dynamics*

بما ان الصورة الرياضية للمعادلة الأساسية في الميكانيكا الكلاسيكية ( قانون نيوتن الثاني ) المعطاة بالصيغة التالية

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}$$

هي متباينة عند تطبيق تحويل لورنس عليها، لهذا يجب اعادة صياغة هذا القانون بطريقة ما تجعله غير متباينة عند تطبيق تحويل لورنس ويجب تحويل هذه الصيغة الى القانون الكلاسيكي في النهاية  $v/c \rightarrow 0$ .

فإذا صيغ قانون نيوتن على الصورة الرياضية

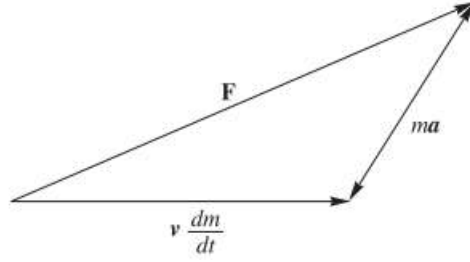
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \mathbf{F} \quad \dots(1.15.1)$$

بذلك يتم تحقيق المتطلبات السابقة الذكر. لا يمكن استخدام العلاقة  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  في الحالة النسبية لأن متجه التسارع  $\mathbf{a}$  للجسيم لا يتطابق مع اتجاه القوة المحركة لهذا الجسيم. في الحالة النسبية، نحصل على

$$\frac{d}{dt}(mv) = \mathbf{F}$$

$$\frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F} \quad \dots(1.15.2)$$

ويمكن تمثيل معادلة (1.15.2) بالمتجهات كما في الشكل (1.15.1)



شكل (1.15.1) متجهات القوة في الحالة النسبية .

نلاحظ من هذا الشكل ان متجة التسارع  $a$  لا يكون على نفس خط متجه القوة  $F$  في الحالة العامة . كما يكون هناك حالتين ينطبق فيهما متجة  $a$  مع متجة القوة  $F$  :

(i) عندما تكون  $F \perp v$  . في هذه الحالة تكون ثابت  $|v|$  ولهذا تصبح معادلة الحركة على النحو

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = F$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} a = F$$

$$a = \frac{F \sqrt{1-v^2/c^2}}{m_0} \quad \dots(1.15.3)$$

(ii) اذا كانت  $F \parallel v$  . في هذه الحالة يمكن كتابة بالصيغة القياسية كالتالي

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = F$$

$$\frac{m_0 \left[ \frac{dv}{dt} \sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{v^2}{c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} \right]}{1-v^2/c^2} = F$$



$$m_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \right] \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}$$

اذن ،

$$a = \frac{\mathbf{F}(1-v^2/c^2)^{3/2}}{m_0} \quad \dots(1.15.4)$$

### (1.16) تكافؤ الكتلة - الطاقة *Mass - Energy Equivalence*

بوجه عام ، يؤدي الشغل المنجز بواسطة القوة المؤثرة على جسيم ما الى زيادة في طاقته الحركية. وتعطى هذه الزيادة المتناهية الصغر  $dT$  والناجمة عن القوة  $\mathbf{F}$  المؤثرة عبر المسار  $d\mathbf{r} (= v dt)$  كالتالي:

$$\begin{aligned} dT &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot v dt = \frac{d}{dt} (mv) \cdot v dt = d(mv) \cdot v \\ &= dm v \cdot v + m dv \cdot v \\ &= v^2 dm + m v \cdot dv \\ &= v^2 dm + m v dv \quad \dots(1.16.1) \end{aligned}$$

حيث ان كتلة الجسيم تتغير مع سرعته كما يلي

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad ، \text{ او}$$

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$$

بإشتقاق هذه المعادلة ، نحصل على التالي

$$2mc^2 dm = 2mv^2 dm + 2m^2 v dv$$

بإختزال العوامل المشتركة في حدود هذه المعادلة ، نجد ان

$$c^2 dm = v^2 dm + mvdv \quad \dots(1.16.2)$$

باستخدام معادلة (1.16.1) ، نجد ان من الممكن كتابة معادلة (1.16.2) على الصورة التالية

$$dT = c^2 dm \quad \dots(1.16.3)$$

بإجراء عملية التكامل على حدود معادلة (1.16.3) ، نحصل على الطاقة الحركية الكلية للجسيم على النحو

$$\int_0^T dT = c^2 \int_{m_0}^m dm$$

$$T = (m - m_0)c^2 = (\gamma - 1)m_0c^2 \quad \dots(1.16.4)$$

او

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad \dots(1.16.5)$$

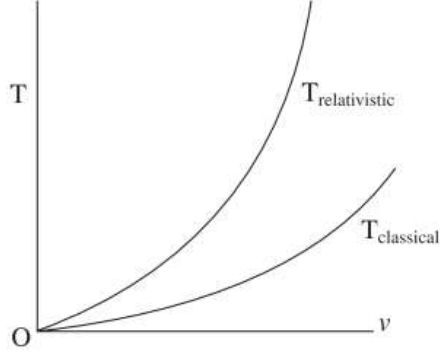
تعطي معادلة (1.16.5) تعبيراً للطاقة الحركية النسبية لجسيم يتحرك بسرعة نسبية  $v$  ، وفي حالة السرعة الصغيرة ( $v/c \rightarrow 0$ ) ، تؤول هذه المعادلة الى العلاقة الكلاسيكية للطاقة الحركية وهي

$$T = m_0 c^2 \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right]$$

$$= m_0 c^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad \text{(classical result)}$$

يوضح الشكل (1.16.1) اختلاف الطاقة الحركية النسبية والكلاسيكية مع سرعة الجسيم .



شكل (1.16.1) الطاقة الحركية النسبية والكلاسيكية كدالة للسرعة .

يمكن اعادة كتابة التعبير الرياضي في معادلة (1.16.4) بالصورة التالية

$$mc^2 = T + m_0c^2 \quad \dots(1.16.6)$$

واعطى العالم أينشتاين تفسيراً للحد الأيسر في معادلة (1.16.6) على اعتباره يمثل الطاقة الكلية  $E$  للجسيم . ولهذا تصبح هذه المعادلة كالتالي

$$E = mc^2 = T + m_0c^2 \quad \dots(1.16.7)$$

من هذه المعادلة ، يمكن استنتاج ما يلي

إذا كان الجسيم ساكناً ، تكون طاقته الحركية  $T = 0$  ومع ذلك فإنه يملك طاقة تساوي  $m_0c^2$  . وتسمى هذه الطاقة **طاقة السكون** *rest energy* . لذلك ، في الفيزياء النسبية تكون الطاقة الكلية للجسيم المتحرك مساوية لمجموع طاقة الحركية وطاقة سكونه ، أي

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m_0c^2 \quad \dots(1.16.8)$$

تعتبر معادلة (1.16.8) من أهم القوانين الأساسية في الطبيعة والتي تعبر عن العلاقة بين الطاقة الكلية  $E$  للجسيم مع كتلته . وتنص هذه المعادلة على أن التغير في الطاقة الكلية للجسيم بمقدار  $\Delta E$  يكافئ تغيراً في كتلته بمقدار  $\Delta m = \Delta E/c^2$  والعكس بالعكس . وهذا ما يعرف في النظرية النسبية الخاصة بمبدأ تكافؤ **الكتلة - الطاقة** .

### (1.17) العلاقة بين الطاقة والزخم *Relation between Energy and Momentum*

من البند السابق ، تكون الطاقة الكلية لجسيم متحرك وكذلك الزخم الخطي لهذا الجسيم كما يلي

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad \dots(1.17.1)$$

$$p = \gamma m_0 v$$

اذن ،

$$pc = \gamma m_0 v c \quad \dots(1.17.2)$$

بتربيع المعادلتين السابقتين وطرح الناتج ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= \gamma^2 m_0^2 (c^4 - v^2 c^2) \\ &= \gamma^2 m_0^2 c^4 (1 - v^2 / c^2) \\ &= (m_0 c^2)^2 \end{aligned} \quad \dots(1.17.3)$$

تعطي هذه المعادلة العلاقة بين الطاقة الكلية والزخم الخطي للجسيم . وبما ان الكمية في الطرف الأيمن لهذه المعادلة غير متباينة ، لذلك تكون الكمية  $E^2 - (pc)^2$  غير متباينة ايضا .

### (1.18) زخم الفوتون *Momentum of Photon*

يكون الزخم الخطي للجسيم المتحرك بسرعة  $v$  كالتالي

$$p = mv = \frac{E}{c^2} v \quad \dots(1.18.1)$$

وبما ان الفوتون هو كوانتا ضوئية بطاقة  $E = hv$  وسرعة  $c$  ، لذلك يكون زخمه الخطي كالتالي

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \dots(1.18.2)$$

او

$$E = pc \quad \dots(1.18.3)$$

من معادلة (1.17.3) ، نلاحظ ان كتلة سكون الفوتون تساوي **الصفر** . في الحقيقة كل الجسيمات المتحركة بسرعة الضوء  $c$  يكون لها كتلة سكون صفرية ، ومن هذه الجسيمات الفوتون والنيوترينو *neutrino* . وايضا يكون العكس صحيحا ، حيث تتحرك جميع الجسيمات ذات الكتل السكونية الصفرية بسرعة الضوء .

## (1.19) تحويل الزخم والطاقة Transformation of Momentum and Energy

حيث ان كلا من طاقة وزخم الجسيم تعتمد على السرعة ، لذلك تكون هذه الكميات الفيزيائية مختلفة عند التحويل من اطار خامل الى اخر متحرك بالنسبة اليه ( كما سبق شرحه ) . في هذا البند سنحصل على معادلات تحويل لهذه الكميات .

لنفرض ان جسما ما تحرك من نقطة  $(x, y, z)$  الى نقطة أخرى  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  بمسافة  $d\ell$  في زمن قدره  $dt$  . من مبادئ الهندسة التحليلية ، نجعل على

$$d\ell^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

وعليه ، تكون سرعة هذا الجسم كما يلي:  $v = d\ell/dt$  . كما تكون الفترة بين النقطتين كما يلي

$$\begin{aligned} ds &= [(cdt)^2 - (d\ell)^2]^{1/2} \\ &= cdt \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{cdt}{\gamma} \end{aligned}$$

وعليه ،

$$dt = \frac{\gamma ds}{c} \quad \dots(1.19.1)$$

تكون مركبة متجه الزخم الخطي للجسيم في اتجاه محور  $x$  كما يلي

$$p_x = \gamma m_0 v_x = \gamma m_0 \frac{dx}{dt} = \left( \frac{m_0 c}{ds} \right) dx \quad \dots(1.19.2)$$

وبالمثل

$$\begin{aligned} p_y &= \left( \frac{m_0 c}{ds} \right) dy \\ p_z &= \left( \frac{m_0 c}{ds} \right) dz \end{aligned} \quad \dots(1.19.3)$$

كما تكون طاقة الجسيم كالتالي

$$E = \gamma m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 \frac{dt}{ds} = \left( \frac{m_0 c}{ds} \right) c^2 dt$$

او

$$\frac{E}{c^2} = \left( \frac{m_0 c}{ds} \right) dt \quad \dots(1.19.4)$$

حيث ان الكميات  $m_0, c, ds$  غير متباينة ، لذلك يتبع من المعادلات (1.19.2 - 1.19.4) ان الكميات  $p_x, p_y, p_z ; E/c^2$  تتحول مثل الكميات  $dx, dy, dz$  عند ملاحظتها ما بين اطارين خاملين . وهكذا تكون معادلات التحويل لمركبات الزخم والطاقة ، مع تحولات الإحداثيات والزمن كما يلي

$$p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2), \quad x' = \gamma(x - vt) \quad \dots(1.19.5)$$

$$p'_y = p_y \quad y' = y$$

$$p'_z = p_z \quad z' = z$$

$$\frac{E'}{c^2} = \gamma \left( \frac{E}{c^2} - \frac{vp_x}{c^2} \right), \quad t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad \dots(1.19.6)$$

لتذكر هذه المعادلات ، يمكن استخدام الإرتباط المقارن بين هذه الكميات كالتالي

$$p_x \Leftrightarrow x, p_y \Leftrightarrow y, p_z \Leftrightarrow z, (E/c^2) \Leftrightarrow t$$

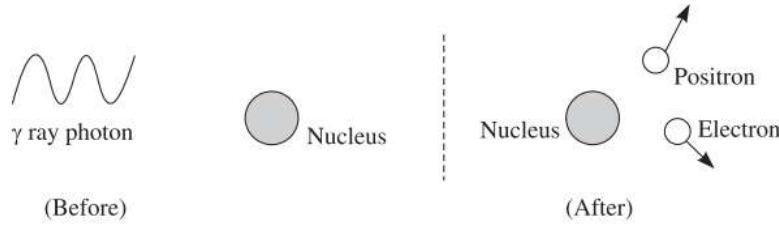
وبعبارة اخرى ، يمكن كتابة معادلات تحويل الزخم الخطي والطاقة اذا عرفنا معادلات تحويل احداثيات المكان والزمان .

## (1.20) برهان قانون تكافؤ الكتلة - الطاقة *Verification of Mass- Energy Equivalence Formula*

هناك عدة ظواهر فيزيائية تبرهن صحة علاقة اينشتين  $E = mc^2$  بالتجربة العملية . سنناقش ظاهرتين فقط من بين هذه الظواهر وهما:

### (i) إنتاج الزوج *Pair Production*

في هذه الظاهرة يتجسد فوتون شعاع جاما *Gamma ray* اثناء مروره بالقرب الكافي من نواة الى زوج من الجسيمات الأولية هما الإلكترون والبزوترون *positron* ( الشكل 1.20.1a ) . ووجود النواة يكون من الضروري في هذه الحالة لحفظ الزخم الخطي .



شكل (1.20.1a) عملية انتاج الزوج .

وبحسب قانون تكافؤ الكتلة – الطاقة يجب ان يكون الحد الأدنى لطاقة هذا الفوتون مساويا لمجموع طاقي السكون لهذين الجسيمين المخلوقين في هذه العملية. حسابيا ، يكون هذا المجموع يساوي للمقدار التالي :

$2m_0c^2 = 1.02 \text{ Mev}$  . وبالفعل تم التحقق من هذا ، فقد وجد عمليا ان فوتون جاما الذي طاقته اقل من هذا المقدار لا ينتج عنه الزوج المذكور ( زوج الكترون – بوزوترون) بينما يخلق الفوتون الذي تكون طاقته اكبر من  $1.02 \text{ Mev}$  هذا الزوج وتذهب الطاقة الزائدة عن هذا الحد الأدنى الى الجسيمين بصورة طاقة حركية .

كما تعطى طول موجة البدء ( العتبة ) *threshold wavelength* لفوتون جاما كالتالي

$$h\nu = \frac{ch}{\lambda} = 2m_0c^2$$

$$\lambda = \frac{ch}{2m_0c^2}$$

$$= \frac{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{Å}}{1.02 \text{ MeV}} = 0.012 \text{ Å}$$

عمليا ، وجد ان التقاء الإلكترون مع البوزوترون ينتج عنه تلاشي (محو) هذين الجسيمين وخلق فوتونين ، وتعرف هذه العملية يتلاشي الزوج *pair annihilation* ( الشكل 1.20.1b) .



شكل (1.20.1b) عملية تلاشي الزوج .

ويمكن التعبير عن هذه العملية بالتفاعل التالي



### (ii) طاقة الربط النووي Nuclear Binding Energy

وجد عمليا ان عند اندماج النيكلونات *nucleons* ( البروتونات + النيوترونات) مع لتكوين نواة ذرة ما ، تكون كتلة هذه النواة اقل من مجموع مكوناتها دائما. تسمى الكتلة المختفية **بنقص الكتلة** *mass defect* ويتحول هذا الفرق في الكتل الى ما يعرف بطاقة الربط النووي . ويمكن حساب هذه الطاقة كما يلي

لنفرض ان لنواة ما عدد كتلي *A* ( عدد النيوكلونات) وعدد ذري *Z* ( عدد البروتونات) ، يكون نقص الكتلة  $\Delta m$  كما يلي

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z) m_p - M_{nuc}] \quad \dots(1.21.1)$$

وبحسب قانون تكافؤ الكتلة – الطاقة تكون طاقة الربط النووي الناتجة عن هذا النقص في الكتل كما يلي

$$B = (\Delta m) c^2 \quad \dots(1.21.2)$$

لتوضيح ذلك ، يمكن حساب طاقة الربط النووي لنواة الهيليوم  ${}^4_2\text{He}$  المكونة من بروتونين و نيوترونين:  $A = 4, Z = 2$  كما يلي

$$\text{كتلة البروتونات} : 2(1.00815)amu = 2(9.38.7)MeV$$

$$\text{كتلة النيوترونات} : 2(1.0080)amu = 2(939.5)MeV$$

$$\text{كتلة النواة} : 4.00260 amu = 3728.0 MeV$$

$$\text{طاقة الربط} : (1877.4 + 1879.10 - 3728.0)MeV = 28.5 MeV$$

$$\text{طاقة الربط لكل نيوكلون} : 28.5/4 = 7.1 MeV$$



## تمارين محلولة

(1) اثبت ان قانون حفظ الزخم الخطي يكون غير متباينا في تحويل غاليليو؟

### الحل

اعتبر كرتين كتلتيهما  $m_1, m_2$  وتتحركان بسرعتين  $u_1, u_2$  بالنسبة للأرض . لنفرض ان بعد التصادم اصبحت سرعتيهما  $v_1, v_2$  . بحسب قانون حفظ الزخم الخطي في الإطار  $S$  ، نحصل على

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \dots(1)$$

كما يلاحظ المراقب نفس التصادم في الإطار  $S'$  الذي يتحرك بالنسبة للإطار  $S$  بسرعة  $v$  .

في الإطار  $S'$  تكون سرع الكرتين قبل وبعد التصادم كالتالي

$$u'_1 = u_1 - v, \quad u'_2 = u_2 - v, \quad v'_1 = v_1 - v, \quad v'_2 = v_2 - v \quad \dots(2)$$

كما تكون صيغة قانون حفظ الزخم الخطي في هذا الإطار كما يلي

$$m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad \dots(3)$$

باستخدام معادلة (2) ، نجد ان تحويل معادلة (3) كالتالي

$$m_1 (u_1 - v) + m_2 (u_2 - v) = m_1 (v_1 - v) + m_2 (v_2 - v)$$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

وهذا هو قانون حفظ الزخم الخطي في الإطار  $S$  .

(2) برهن ان قانون حفظ الطاقة الحركية في حالة التصادم المرن بين جسمين يكون غير متباينا تحت تحويل غاليليو؟

### الحل

في الإطار  $S$  ، نفرض حصول تصادم تام المرونة بين جسمين كتلة كل واحد منهما  $m_1, m_2$  ويتحركان بسرعة  $u_1, u_2$  في اتجاه محور  $x$  . لنفرض ان بعد التصادم اصبحت سرعتاهما  $v_1, v_2$  على الترتيب . يعطي قانون حفظ الطاقة الحركية ما يلي

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad \dots(1)$$

كما يلاحظ نفس التصادم في الإطار  $S'$  الذي يتحرك بسرعة  $v$  في اتجاه محور  $x$  . تكون السرعة الابتدائية والنهائية للجسمين في هذا الإطار كما يلي

$$u'_1 = u_1 - v, \quad u'_2 = u_2 - v, \quad v'_1 = v_1 - v, \quad v'_2 = v_2 - v$$

بتعويض القيم  $u_1, u_2, v_1, v_2$  في معادلة (1) ، نحصل على التالي

$$\frac{1}{2}m_1(u'_1 + v)^2 + \frac{1}{2}m_2(u'_2 + v)^2 = \frac{1}{2}m_1(v'_1 + v)^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2 + v)^2 \quad \dots(2)$$

ب طرح معادلة (1) من معادلة (2) واستخدام قانون حفظ الزخم الخطي في الناتج، نحصل على

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad \dots(3)$$

وهذه المعادلة تمثل قانون حفظ الطاقة الحركية في الإطار  $S'$  .

(3) اذا كانت احداثيات حدث ما في الإطار  $S$  هي :  $x = 50 \text{ m}, y = 50 \text{ m}, z = 10 \text{ m}, t = 5 \times 10^{-8} \text{ s}$  . جد احداثيات هذا الحدث كما يشاهده المراقب في الإطار  $S'$  الذي يتحرك بالنسبة للإطار  $S$  بسرعة  $0.6c$  في اتجاه محور  $x - x'$  المشترك ؟ .

**الحل**

يكون تحويل لورنس كما يلي

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 1/\sqrt{1 - 0.36} = 1.25$$

$$x' = 1.25(50 \text{ m} - 0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \times 5 \times 10^{-8} \text{ s}) = 51.25 \text{ m}$$

$$y' = 50 \text{ m}, \quad z' = 10 \text{ m}$$

$$t' = 1.25(5 \times 10^{-8} \text{ s} - 10 \times 10^{-8} \text{ s}) = -6.25 \times 10^{-8} \text{ s}.$$

(4) اذا حصل حدث 1 عند  $x_1 = 20 \text{ m}$  ,  $t_1 = 2 \times 10^{-8} \text{ s}$  ، كما حصل حدث 2 عند الإحداثيات

$x_2 = 60 \text{ m}$  ,  $t_2 = 3 \times 10^{-8} \text{ s}$  في الإطار  $S$  . فإذا كان الإطار  $S'$  يتحرك بسرعة  $0.6c$  في اتجاه المحور المشترك  $x - x'$  بالنسبة للإطار  $S$  ، جد

(i) التفريق المكاني بين الحدثين في الإطار  $S$  ؟

(ii) الفترة الزمنية بين حصول الحدثين ؟

**الحل**

(i) يكون التفريق المكاني بين الحدثين في الإطار  $S'$  كما يلي

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \gamma [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \\ &= 1.25 [(60 - 20) \text{ m} - 0.6 \times 3 \times 10^{-8} \text{ m/s} (3 - 2) \times 10^{-8} \text{ s}] \\ &= 47.75 \text{ m.} \end{aligned}$$

(ii) تكون الفترة الزمنية بين حصول الحدثين في الإطار  $S'$  كما يلي

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \gamma [(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2] \\ &= 1.25 [1 \times 10^{-8} \text{ s} - (0.6 \times 40) / (3 \times 10^8)] \\ &= -8.75 \times 10^{-8} \text{ s.} \end{aligned}$$

(5) اذا كانت احداثيات المكان والزمان لحدثين في الإطار  $S$  كما يلي:

$x_1 = 24 \text{ m}$  ,  $t_1 = 8 \times 10^{-8} \text{ s}$  ,  $x_2 = 48 \text{ m}$  ,  $t_2 = 4 \times 10^{-8} \text{ s}$  . جد سرعة الأطار  $S'$  الذي يكون فيه الحدثين متزامنين ( أنيين) .

**الحل**

تكون الفترة الزمنية بين الحدثين في الإطار  $S'$  كما يلي

$$(t'_2 - t'_1) = \gamma [(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1) / c^2]$$

حتى يكون الحدثان متزامنان في الإطار  $S'$  ، يجب ان :  $t'_2 - t'_1 = 0$  . وعليه ، تعطي هذه العلاقة التالي

$$\frac{v}{c} = \frac{c(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s} (-4 \times 10^{-8} \text{ s})}{48 \text{ m} - 24 \text{ m}} = -0.5$$

$$v = -0.5c.$$

(6) اذا وقع حدثان في نفس المكان في اطار  $S$  وكانت الفترة الزمنية بين حدوثهما تساوي  $1\text{s}$  ، ولاحظ المراقب في الإطار  $S'$  ان الفرق الزمني لحدثهما يساوي  $4\text{s}$  . جد التفريق المكاني للحدثين في الإطار  $S'$  ؟

**الحل**

يكون التفريق المكاني للحدثين في الإطار  $S'$  كما يلي

$$x'_2 - x'_1 = \gamma [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$$

بالفرض ،

$$x_2 - x_1 = 0, \quad t_2 - t_1 = 1\text{s}, \quad t'_2 - t'_1 = 4\text{s}$$

اذن ،

$$x'_2 - x'_1 = -\gamma v \quad \dots(1)$$

وتكون الفترة الزمنية بين الحدثين في الإطار  $S'$  كما يلي

$$t'_2 - t'_1 = \gamma [(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2]$$

$$4 = \gamma \quad \therefore \beta = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \dots(2)$$

من معادلتني (1) و (2) ، نجد ان

$$x'_2 - x'_1 = -2\left(\sqrt{\gamma^2 - 1}\right)c = -2c\sqrt{15}.$$

(7) في الإطار  $S$  ، حصل حدثان في نفس الوقت وبتفريق مكاني  $x_0$  . اذا لاحظ المراقب الموجود في الإطار  $S'$  ان التفريق المكاني بين الحدثين يساوي  $2x_0$  ، وكان الإطار  $S'$  يتحرك بالنسبة للإطار  $S$  بسرعة ثابتة في اتجاه المحور المشترك  $x - x'$  . جد الفترة الزمنية بين الحدثين في الإطار  $S$  ؟

**الحل**

من المفروض ،

$$t_2 - t_1 = 0, x_2 - x_1 = x_0, x'_2 - x'_1 = 2x_0$$

يكون التفريق المكاني للحدثين في الإطار  $S'$  كما يلي

$$x'_2 - x'_1 = \gamma [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$$

$$2x_0 = \gamma x_0$$

$$\gamma = 2 \Rightarrow v = c\sqrt{3}/2$$

$$t'_2 - t'_1 = \gamma [(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2] = -\frac{\sqrt{3}}{c} x_0.$$

(8) كم يجب ان تكون سرعة صاروخ حتى يبدو طوله متقلصا بمقدار 99% بالنسبة لطوله في حالة السكون ؟

**الحل**

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{whence} \quad \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = \sqrt{1 - (0.99)^2} = 0.141$$

$$v = 0.141 c.$$

(9) اذا كان قضيب طوله الحقيقي  $1.0m$  يصنع زاوية  $45^\circ$  مع محور  $x$  ، جد طول هذا القضيب ومقدار زاوية ميله مع محور  $x$  في الإطار الذي بالنسبة اليه يكون القضيب متحركا بسرعة  $v = 0.5c$  في اتجاه المحور المشترك  $x - x'$  ؟

**الحل**

نفرض ان  $l_0$  يمثل الطول الحقيقي للقضيب ،  $\theta'$  ميل القضيب مع محور  $x'$  في الإطار  $S'$  . تكون الكميات المقابلة في الإطار  $S$  :  $l, \theta$  . وعليه ،

$$l_x = l'_x \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{or} \quad l \cos \theta = l' \cos \theta' \sqrt{1 - \beta^2} \quad \dots(1)$$

$$l_y = l'_y \quad \text{or} \quad l \sin \theta = l' \sin \theta'. \quad \dots(2)$$

بتربيع معادلتني (1) و (2) وجمع النواتج ، نجد ان

$$l^2 = l'^2[\sin^2 \theta' + (1 - \beta^2)\cos^2 \theta']$$

$$= 1.00 \left[ \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} \right] = 0.875$$

$$l = 0.94 \text{ m}$$

بقسمة معادلة (1) على معادلة (2) ، نجد ان

$$\tan \theta = \frac{\tan \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/4}} = 1.19$$

$$\theta = 49^\circ.$$

(10) قطعة معدنية على شكل متوازي مستطيلات ابعادها  $a, b, c$  موضوعة بحيث تكون حوافها موازية للمحاور الأحداثية في اطار  $S$  . فاذا عرفت كثافتها كنسبة كتلة السكون الى الحجم ، جد سرعة الإطار المرجعي  $S'$  الذي يكون متحركا بشكل مواز للحافة  $a$  بحيث تزداد كثافة القطعة بمقدار 25% .

**الحل**

كثافة القطعة في الإطار  $S$  :

$$\rho_0 = \frac{m_0}{abc}$$

نفرض ان  $v$  سرعة الإطار  $S'$  بالنسبة للإطار  $S$  . يكون حجم القطعة في الإطار  $S'$  يساوي  $abc\sqrt{1 - \beta^2}$  . اذن تكون كثافة القطعة في هذا الإطار كما يلي

$$\rho = \frac{m_0}{abc\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

من المعطى ،  $\rho = (1 + 0.25)\rho_0$  ، او

$$1.25 = \frac{1}{1 - \beta^2} \rightarrow \beta = 0.6$$

(11) جد السرعة التي تتحرك بها ساعة ضبط الوقت بالنسبة لمراقب بحيث انها تبدو قد خسرت 4 دقائق في 24 ساعة ؟ .

**الحل**

الزمن الحقيقي :  $\Delta\tau = 1436 \text{ min}$  ، الزمن غير الحقيقي :  $\Delta t = 1440 \text{ min}$  . باستخدام قانون تمدد الزمن النسبي ، نجد ان

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \therefore \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1436}{1440} = 1 - \frac{4}{1440}$$

$$1-\beta^2 = \left(1 - \frac{1}{360}\right)^2 = 1 - \frac{2}{360}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{180}}$$

(12) يتحرك جسيم معدل فترة حياته  $1\mu s$  في المعمل بسرعة  $2.7 \times 10^8 \text{ m/s}$  .

(i) جد فترة حياة هذا الجسيم كما تقاس في اطار المعمل ؟

(ii) جد المسافة التي يقطعها هذا الجسيم في المعمل قبل ان ينحل .؟

**الحل**

(i) تكون فترة حياة الجسيم في إطار المعمل كما يلي

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 \times 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1-(0.9)^2}} = 2.29 \times 10^{-6} \text{ s}$$

(ii) المسافة المقطوعة في اطار المعمل هي

$$d = v \Delta t = 2.7 \times 10^8 \text{ m/s} \times 2.29 \times 10^{-6} \text{ s} = 62 \times 10^3 \text{ m}.$$

(13) في اطار S ، يتحرك ميزون بسرعة  $v = 0.99 c$  ويقطع مسافة  $3.0 \text{ km}$  قبل ان ينحل. جد ما يلي

(i) فترة الحياة الحقيقية لهذا الميزون ؟

(ii) المسافة المقطوعة في الإطار الذي يكون فيه الميزون ساكنا .؟

**الحل**

(i) فترة الحياة الحقيقية للميزون تساوي

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1-\beta^2} = \frac{d}{v} \sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$= \frac{3 \times 10^3 \text{ m}}{0.99 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \sqrt{1-(0.99)^2} = 1.4 \times 10^{-6} \text{ s.}$$

(ii) تكون المسافة المقطوعة في اطار الميزون كما يلي

$$d' = d \sqrt{1-\beta^2} = (3 \times 10^3 \text{ m}) \sqrt{1-(0.99)^2} = 0.423 \times 10^3 \text{ m.}$$

(14) لوحظ ان جسيمان من بيتا تتحركان بسرعة  $0.6c$  ،  $0.8c$  في اتجاهين متضادين في اطار المعمل . جد سرعة احد هذين الجسيمين بالنسبة للآخر ؟ .

**الحل**

في الإطار  $S$ ، تكون سرعة دقائق بيتا كما يلي:  $u_1 = 0.6c$  ،  $u_2 = -0.8c$  . لنفرض ان الإطار  $S'$  مرفقا مع احد هذه الدقائق . من الواضح ان هذا الإطار يتحرك بسرعة  $v = 0.6c$  وتكون فيه دقيقة بيتا الأولى ساكنة . لنفرض ان الدقيقة الثانية تتحرك بسرعة  $u'_2$  في الإطار  $S'$  . باستخدام تحويل السرعة النسبي ، نحصل على

$$u'_2 = \frac{u_2 - v}{1 - u_2 v / c^2} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 - (-0.8c)(0.6c)/c^2} = -0.946c.$$

(15) جد السرعة التي يتحرك بها جسيم لتصبح كتلته ثلاثة اضعاف كتلة سكونه ؟ .

**الحل**

بالفرض ، نجد ان  $m = 3m_0$  . باستخدام قانون الكتلة النسبي  $m = m_0 / \sqrt{1-\beta^2}$  ، نحصل على

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{m_0}{m}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \therefore v = \frac{2\sqrt{2}}{3} c.$$

(16) عند اي سرعة تصبح الطاقة الكلية لجسيم ما  $n$  مرة مقدار طاقة سكونه ؟ .

**الحل**



من المفروض في السؤال ،  $m c^2 = n m_0 c^2 \rightarrow m = n m_0$  ،

باستخدام قانون الكتلة النسبية ،  $m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$  ، نجد ان

$$\beta = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \therefore v = c \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

(17) عند اي سرعة تصبح الطاقة الحركية لجسيم ما تعادل  $n$  مرة طاقة الحركية الساكنة ؟.

**الحل**

بالفرض ،

$$\begin{aligned} T &= n m_0 c^2 \\ (m - m_0) c^2 &= n m_0 c^2 \\ m &= (n + 1) m_0 \end{aligned}$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = (n + 1) m_0 \therefore \beta = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}.$$

(18) اذا كانت الطاقة الكلية لجسيم ما تعادل  $n$  مرة طاقة سكونه ، جد الزخم الخطي لهذا الجسيم ؟ .

**الحل**

بالفرض ،  $E = n m_0 c^2$  . باستخدام قانون الطاقة الكلية النسبي ، نحصل على التالي

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$pc = \sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2} = \sqrt{(n m_0 c^2)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

$$p = m_0 c \sqrt{n^2 - 1}.$$

(19) جد الزخم الخطي الذي تكون عنده الطاقة الحركية للجسيم ما تعادل  $n$  مرة طاقة حركته السكونية ؟ .

**الحل**

من الفرض ،  $T = n m_0 c^2$  . بما ان الطاقة الكلية للجسيم هي

$$E^2 = [T + m_0c^2]^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

اذن ،

$$pc = m_0c^2 \sqrt{n(n+2)}$$

$$p = m_0c \sqrt{n(n+2)}.$$

(20) برهن ان سرعة الجسيم الذي تكون طاقته الكلية تعادل التالي

$$v = c \left[ 1 - \left( \frac{m_0c^2}{E} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

**الحل**

حيث ان ،

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \quad \dots(1)$$

$$p = \frac{E}{c^2} v. \quad \dots(2)$$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1) ، نجد ان

$$E^2 = \frac{v^2}{c^2} E^2 + (m_0c^2)^2$$

اذن ،

$$v = c \left[ 1 - (m_0c^2/E)^2 \right]^{1/2}.$$

(21) برهن انه يمكن التعبير عن الزخم الخطي  $p$  لجسيم ما بدلالة طاقته الحركية  $T$  كالتالي

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}$$

ثم جد زخم البروتون الذي طاقته الحركية تساوي  $500 \text{ MeV}$  .؟

**الحل**

حيث

$$E^2 = (T + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$
$$(pc)^2 = (T + m_0c^2)^2 - (m_0c^2)^2$$
$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}.$$

(22) برهن ان سرعة الجسيم الذي زخمه يساوي  $p$  تعطى كالتالي

$$v = pc [p^2 + m_0^2c^2]^{-1/2}.$$

الحل

باستخدام قانون الزخم الخطي النسبي للجسيم

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

بتربيع هذه العلاقة واعادة ترتيب الحدود ، نحصل على

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) p^2 = m_0^2 v^2$$
$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}.$$

(23) احسب الزخم الخطي للإلكترون الذي طاقته الحركية تساوي  $2.0 \text{ BeV}$  ؟

الحل

تكون الطاقة الكلية كالتالي

$$E^2 = (T + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2.$$

إذا كانت طاقة السكون صغيرة جداً بالنسبة للطاقة الحركية ، فإن من الممكن إهمالها وتصبح هذه العلاقة كما يلي

$$E = T = pc.$$

( هنا طاقة السكون للإلكترون تساوي 0.51 MeV ، بينما طاقته الحركية المفروضة تعادل 2 BeV ) .  
وعليه ،

$$p = T/c = 2 \text{ BeV}/c.$$

(24) عند أي سرعة يختلف مقدار الزخم الكلاسيكي عن الزخم النسبي لجسيم ما بقيمة 1% ؟

**الحل**

الزخم الكلاسيكي :  $p_c = m_0 v$  ، الزخم النسبي :  $p_r = m_0 v / \sqrt{1 - \beta^2}$  . إذن ،

$$\frac{p_r - p_c}{p_r} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2}$$

نفرض أن  $n$  تمثل الزيادة الكسرية للزخم ، إذن

$$n = 1 - \sqrt{1 - \beta^2}$$

ومن ذلك ، نحصل على

$$\beta = \sqrt{n(2-n)}$$

بتعويض قيمة  $n = 0.01$  ، نجد أن  $\beta = 0.14$  .

(25) جد السرعة التي تجعل الزخم النسبي يساوي  $n$  مرة مقدار الزخم الكلاسيكي لجسيم ما ؟

**الحل**

$$\frac{p_r}{p_c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{n}{1}$$

إذن

$$v = \frac{c\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

(26) يتسارع الكترون خلال منطقة ذات فرق جهد 1.0 MeV ، جد سرعة هذا الإلكترون ؟ .

**الحل**

طاقة حركة الإلكترون تساوي

$$T = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

اذن ،

$$\beta = \sqrt{1 - \left( \frac{m_0c^2}{T + m_0c^2} \right)^2}$$

بتعويض قيم  $m_0c^2 = 0.51 \text{ MeV}$  ،  $T = 1.0 \text{ MeV}$  ، نحصل على  $\beta = 0.9988$  .

(27) يتسارع الكترون الى ان تبلغ طاقته الكلية 2.0 BeV . جد

(i) كتلة الإلكترون الفعالة بدلالة كتلة سكونه .

(ii) سرعة هذا الإلكترون بدلالة سرعة الضوء .

**الحل**

الطاقة الكلية للإلكترون هي

$$mc^2 = T + m_0c^2$$

بقسمة حدود المعادلة على  $m_0c^2$  ، نجد ان

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{T}{m_0c^2} = 1 + \frac{2000 \text{ MeV}}{0.51 \text{ MeV}} = 3915$$

من العلاقة  $m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$  ، نحصل على

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3915}\right)^2}$$

(28) جد الشغل المبذول لزيادة سرعة جسيم كتلة سكونه  $m_0$  من  $0.6c$  الى  $0.8c$  ؟.

الحل

(i) كلاسيكيا ، يكون الشغل المبذول لزيادة الطاقة الحركية كما يلي

$$W = \frac{1}{2}m_0v_0^2 - \frac{1}{2}m_0v_1^2 = 0.5m_0[(0.8c)^2 - (0.6c)^2] = 0.14m_0c^2$$

(ii) على اساس الحسابات النسبية ، يكون الشغل المبذول كما يلي

$$= E_2 - E_1 = m_2c^2 - m_1c^2$$

$$= m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right) = 0.417m_0c^2$$

(29) احسب الكتلة الفعالة لفوتون طول موجته (i)  $5000\text{A}^0$  (ii)  $0.1\text{A}^0$  ؟.

الحل

(i) طاقة الفوتون النسبية هي  $E = m_0c^2$  وطاقتة الكمية هي  $E = h\nu = \frac{ch}{\lambda}$  . بمساواة المقدارين معا ، نحصل على

$$mc^2 = \frac{ch}{\lambda} \quad \therefore m = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{(5000 \times 10^{-10} \text{ m})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 4.42 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

(ii) تكون الكتلة الفعالة للفوتون عند طول الموجة الثانية كما يلي

$$m = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{0.1 \times 10^{-10} \text{ m} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2.21 \times 10^{-31} \text{ kg.}$$

(30) احسب طاقة اشعة جاما الصغرى التي يمكن عندها انتاج الزوج ( الكترون – بوزوترون ) ؟.

**الحل**

حتى تتم عملية انتاج الزوج يجب ان تكون طاقة فوتون جاما على الأقل بمقدار مجموع طاقتي السكون للإلكترون والبوزوترون ، اي

$$E = 2 m_0 c^2 = 2 (0.51 \text{ MeV}) = 1.02 \text{ MeV.}$$

(31) تبعث نواة كتلتها  $m$  اشعة جاما بتردد  $\nu$  . برهن ان فقد الطاقة الداخلية لهذه النواة يساوي

$$\Delta E = h\nu \left[ 1 + \frac{h\nu}{2m_0 c^2} \right].$$

**الحل**

كمية الزخم الخطي هي  $p = h\nu/c$  . لحفظ كمية الزخم الخطي للنظام ، يجب ان يكون الزخم الخطي للنواة المرتدة مساويا لهذا المقدار وفي الإتجاه المعاكس . اذا كان سرعة هذه النواة يساوي  $\nu$  فإن

$$mv = \frac{h\nu}{c} \quad \dots(1)$$

فقد الطاقة الداخلية للنواة يساوي مجموع الطاقة الحركية للنواة المرتدة وطاقة الفوتون . وعليه ،

$$\begin{aligned} \Delta E &= h\nu + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= h\nu + \frac{1}{2} \frac{(h\nu)^2}{mc^2} \\ &= h\nu \left[ 1 + \frac{h\nu}{2mc^2} \right]. \end{aligned}$$

(32) تؤثر قوة  $F$  على جسيم كتلته  $m_0$  في اتجاه محور  $x$  . اذا بدء هذا الجسيم حركته من السكون عند  $x=0$  ، جد موقع الجسيم كدالة للزمن ؟ .

**الحل**

معادلة الحركة للجسيم هي

$$\frac{dp}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = F \quad \dots(1)$$

بالتكامل واستعمال الشروط الابتدائية للحركة :  $t = 0, v = 0$  ، نحصل على التالي

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = Ft$$

نحل هذه المعادلة لإيجاد السرعة لنحصل على التالي

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{(F/m_0) t}{\sqrt{1 + (Ft/m_0 c)^2}} \quad \dots(2)$$

بتكامل معادلة (2) ، نجد ان

$$\begin{aligned} x &= \frac{F}{m_0} \int_0^t \frac{tdt}{\sqrt{1 + (Ft/m_0 c)^2}} \\ &= \frac{m_0 c^2}{F} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{Ft}{m_0 c} \right)^2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

(33) تستقبل الأرض الطاقة الشمسية بمقدار  $\sigma = 1.4 \times 10^3 \text{ J/m}^2$  على مساحة متعامدة مع اشعة الشمس . جد نسبة خسارة كتلة الشمس لكل ثانية . حيث معدل نصف قطر مسار الأرض حول الشمس وكتلة الشمس هما :  $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m} , M = 1.97 \times 10^{30} \text{ kg} . ?$

**الحل**

مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس لكل ثانية هي

$$\Delta E = 4 \pi R^2 \sigma$$



وهذه الطاقة تكافئ كتلة قدرها  $\Delta m = \Delta E/c^2$  . اذن ، تكون نسبة خسارة كتلة الشمس هي

$$\frac{\Delta m}{M} = \frac{E}{Mc^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{Mc^2} = \frac{4 \times 3.14 \times (1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2 (1.4 \times 10^3 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^{-1})}{(1.97 \times 10^{30} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2}$$

$$= 2 \times 10^{-21} \text{ s}^{-1}$$

(34) يتحرك جسيم بالنسبة لإطار S بسرعة  $u$  في مستوى  $xy$  وفي اتجاه يصنع زاوية  $\theta$  مع محور  $x$  .  
جد السرعة  $u'$  والزاوية  $\theta'$  في الإطار  $S'$  الذي يتحرك بسرعة  $v$  بالنسبة للإطار S في اتجاه المحور  
المشترك  $x - x'$  ؟

**الحل**

لنفرض ان مركبات السرعة في اتجاه محوري  $x, y$  في الإطار S هي

$$u_x = u \cos \theta, \quad u_y = u \sin \theta.$$

لذلك ، تكون مركبات سرعة هذا الجسيم في الإطار  $S'$  كما يلي

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} = \frac{u \cos \theta - v}{1 - (u \cos \theta) v / c^2} \quad \dots(1)$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - u_x v / c^2} = \frac{u \sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (u \cos \theta) v / c^2} \quad \dots(2)$$

من معادلة (1) و (2) ، نحصل على العلاقة التالية

$$\tan \theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{u \sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{u \cos \theta - v} = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - (v/u)} \quad \dots(3)$$

كما يكون التحويل العكسي للسرعة كالتالي

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + (v/u')} \quad \dots(4)$$

وتكون السرعة في الإطار  $S'$  كما يلي

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 = \frac{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta - \beta^2 u^2 \sin^2 \theta}{[1 + (vu \cos \theta) / c^2]^2} \quad \dots(5)$$

(35) يتحرك جسيم ما بتسارع  $a$  في الإطار  $S$  ، جد تسارع هذا الجسيم في الإطار  $S'$  الذي يتحرك بسرعة  $v$  في الإتجاه الموجب لمحور  $x$  ؟.

**الحل**

تكون مركبات التسارع في الإطار  $S'$  كما يلي

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{du'_x}{dt} \frac{1}{dt'/dt} \quad \dots(1)$$

كما يكون التحويل العكسي للسرعة كالتالي

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \quad \dots(2)$$

بإشتقاق معادلة (2) بالنسبة للزمن  $t$  ، نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{du'_x}{dt} &= \frac{\frac{du_x}{dt}(1 - u_x v / c^2) - (u_x - v) \left( -\frac{du_x}{dt} \frac{v}{c^2} \right)}{(1 - u_x v / c^2)^2} \\ &= \frac{(1 - v^2 / c^2) a_x}{(1 - u_x v / c^2)^2} \quad \dots(3) \end{aligned}$$

يكون تحويل لورنس للزمن كما يلي

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ \therefore \frac{dt'}{dt} &= \frac{1 - u_x v / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad \dots(4) \end{aligned}$$

يكون التسارع في الإطار  $S'$  كالتالي

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{du'_x}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{(1 - v^2 / c^2)^{3/2}}{(1 - u_x v / c^2)^3} a_x \quad \dots(5)$$

(36) اشتق قانون الإنحراف النسبي بإستخدام معادلات تحويل السرعة ؟ .

**الحل**

لنفرض ان مصدرا موضوعا عند نقطة اصل الإطار  $S'$  ويبعث هذا المصدر موجة ضوئية في اتجاه يصنع زاوية  $\theta'$  مع محور  $x$ . في الإطار  $S'$  ، نحصل على

$$u'_x = c \cos \theta', u'_y = c \sin \theta'$$

في الإطار  $S$  ،

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{c \cos \theta' + v}{1 + (v/c) \cos \theta'}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{c \sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (v/c) \cos \theta'}$$

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' + \beta}$$

## تمارين الوحدة الأولى

(1) حصل حدث عند الإحداثيات  $x' = 60m, t' = 5 \times 10^{-8}s$  في الإطار  $S'$  الذي يتحرك بسرعة  $0.6c$  في اتجاه المحور المشترك  $x - x'$  بالنسبة للإطار  $S$ . اذا كانت نقطتا الأصل في الإطارين منطبقين معا في اللحظة  $t = t' = 0$  ، جد احداثيات هذا الحدث في الإطار  $S$  ؟. (الجواب:  $x = 86.25m, t = 21.25 \times 10^{-8}s$ )

(2) وجد ان طول صاروخ  $100m$  عند قياسه من على سطح الأرض . وبعد انطلاقه بسرعة ثابتة  $2 \times 10^8 m/s$  ، جد كم سيبدو طوله لمراقب على سطح الأرض ؟.

(3) اذا كان طول قضيب يساوي  $100m$  عندما يكون في قمر اصطناعي متحركا بسرعة بالنسبة لمعمل على سطح الأرض  $0.8c$  ، جد طول هذا القضيب كما يقيسه مراقب موجود في المعمل ؟.

(4) اذا كان طول قضيب ما يساوي  $1.0 m$  ومتحركا بسرعة  $0.6c$  ، جد طول هذا القضيب كما يبدو في الحالات التالية (i) مراقب ساكن (ii) مراقب متحرك مع القضيب نفسه ؟. (الجواب :  $0.8m, 1m$ ).

(5) يساوي طول صاروخ  $100 m$  على الأرض ، وعندما يطير في الفضاء يبدو طوله مساويا  $99m$  بالنسبة لمشاهد على الأرض . جد سرعة هذا الصاروخ ؟. (الجواب:  $v=0.14c$ ).

(6) جد النسبة المئوية لتقلص قضيب يتحرك بسرعة  $0.8c$  في اتجاه يصنع  $60^\circ$  مع طولة. ؟ (الجواب  $8\%$ ).

- (7) جد سرعة سفينة فضاء التي يبدو كل يوم عليها مقابلا لثلاثة ايام على سطح الأرض .؟
- (8) جد متوسط عمر ميزون الذي يتحرك بسرعة  $0.73c$  ، علما بأن متوسط عمره وهو ساكنا يساوي  $2 \times 10^{-8}$  ثانية.؟ ( الجواب :  $3.7 \times 10^{-8} s$  ) .
- (9) متوسط عمر ميزون في المعمل يساوي  $2 \times 10^{-7} s$  ، جد سرعة هذا الميزون اذا كان الزمن الحقيقي لعمره يساوي  $2.5 \times 10^{-8} s$  .؟
- (10) اذا كان عمر ميزون في حالة السكون يساوي  $2 \times 10^{-8} s$  ، اذا تحرك هذا الميزون بسرعة  $v=0.99c$  ، جد معدل عمره كما يقيسه المراقب في المعمل والمسافة التي يقطعها قبل انحلاله .؟ (الجواب :  $d = 42 m$  ,  $\Delta t = 14.18 \times 10^{-8} s$  ) .
- (11) اذا كانت فترة نصف العمر لميزون تساوي  $1.8 \times 10^{-8} s$  ، وتولدت حزمة هذه الميزونات بسرعة  $v=0.8c$  ، احسب المسافة التي تقطعها هذه الحزمة حتى تتضاءل شدتها الى نصف الشدة الأصلية .؟ ( الجواب :  $d= 7.2m$  ) .
- (12) يتحرك الكترونان بسرعة  $0.8c$  وباتجاه بعضهما البعض . جد سرعة تحرك احدهما بالنسبة للآخر .؟
- (13) يتحرك جسيم بيتا نحو الشرق بسرعة  $0.95c$  ويتحرك جسيم ثاني نحو الغرب بسرعة  $0.85c$  . جد السرعة النسبية لهذين الجسيمين .؟ ( الجواب  $u_x = 0.99c$  ) .
- (14) شوهد في المعمل ان جسيمين يتحركان في اتجاه معاكس لبعضهما البعض بسرعة  $2.8 \times 10^8 m/s$  . جد سرعة احدهما بالنسبة للآخر .؟
- (15) لاحظ مراقب في المعمل دقيقتين متحركتين نحوه في اتجاه معاكس بسرعة  $0.8c$  ،  $0.9c$  على الترتيب . جد السرعة النسبية للدقيقتين كما يقيسها مراقب متحركاً مع احديهما ؟ ( الجواب  $0.98c$  ) .
- (16) لاحظ مراقب اثناء تجربة في المعمل ان ذرة مشعة تتحرك بسرعة  $c/4$  ، فاذا اشعت هذه الذرة جسيم بيتا بسرعة  $0.9c$  بالنسبة للذرة وفي نفس اتجاه حركة هذه الذرة ، جد سرعة جسيم بيتا كما يسجله المراقب ؟ ( الجواب  $0.9c$  ) .
- (17) جد الطاقة الحركية لجسيم كتلة سكونه  $m_0$  ويتحرك بسرعة  $0.9c$  ؟ (الجواب  $1.3 m_0 c^2$  ) .
- (18) احسب سرعة جسيم كتلة سكونه  $3.33 \times 10^{-27} gm$  وطاقته  $2 MeV$  .؟
- (19) يتحرك جسيم بسرعة تجعل طاقته الحركية تساوي طاقة كتلة سكونه ، جد سرعة هذا الجسيم .؟
- (20) احسب كتلة وسرعة البروتون الذي طاقته تساوي  $1 GeV$  . احسب زخم فوتون طاقته  $1 \times 10^{-12} erg$

(21) حزمة من اشعة x- بطول موجة  $1.0 \text{ \AA}$  احسب (i) طاقة فوتون اشعة x- (ii) زخم هذا الفوتون

(iii) كتلة الفوتون (iv) كتلة سكون الفوتون ؟

(22) يتلاشى فوتون جاما الذي طول موجته  $0.0045 \text{ \AA}$  مولدا زوج الكترون- بوزوترون ، جد الطاقة الحركية لهذا الزوج ؟ ( الجواب  $1.73 \text{ MeV}$  ) .

(23) احسب طاقة الربط النووي للديترون ، حيث

$$m_n = 1.008962 \text{ amu}, m_p = 1.008142 \text{ amu}, m_d = 2.01470 \text{ amu}$$

(24) اذا كانت كتلة سكون ذرة الهيدروجين هي  $1.00727 \text{ amu}$  ، وكتلة سكون البروتون  $1.00727 \text{ amu}$  وكتلة سكون الإلكترون  $0.0055486 \text{ amu}$  ، جد طاقة الربط النووي لذرة الهيدروجين ؟ .

(25) يدخل الكترون طاقته  $0.5 \text{ MeV}$  عموديا منطقة مجال مغناطيسي شدته  $5 \times 10^{-3} \text{ Weber/m}^2$  ، جد نصف قطر مسار هذا الإلكترون كلاسيكيا ونسبيا ؟ . ( الجواب  $47.8 \text{ cm}, 58.2 \text{ cm}$  ) .

(26) جد طول موجة العتبة في عملية انتاج الزوج ؟ . ( الجواب : استخدم العلاقة  $\frac{ch}{\lambda} = 2m_0c^2$  ) .

الوحدة الثانية : ميكانيكا الكم  
*Quantum Mechanics*

الفصل الأول : اصل مفاهيم الكم

*Origin of Quantum Concepts*

## 1.1 مقدمة Introduction

أدت ملاحظة الظواهر الضوئية: التداخل ، الحيود ، والإستقطاب الى تطور نظرية الضوء الموجية . كما ان انكار فكرة وجود الأثير من خلال النظرية النسبية طرح عدة اسئلة مهمة لإعتبار طبيعة الموجات الضوئية . وأوضح العديد من الأدلة التجريبية الى استنتاج ان الضوء هو عبارة عن ظاهرة كهرومغناطيسية . ولكن فهم عملية انبعاث وإمتصاص المادة للإشعاع شكل بعض الصعوبات . ومهما يكن تم حل هذه الصعوبة بإفتراضات خاصة متعلقة بتركيب المادة . فقد افترض ان الذرات والجزيئات ، التي تكون المادة ، تتألف من متذبذبات الكترونية ، تبدأ بالذبذبة تحت تأثير مثير خارجي . حيث يشكل هذا الإلكترون المهتز دقائق مشحونة متسارعة ، ولذلك ، عند سقوط موجة كهرومغناطيسية على ذرات المادة فإنها تجعل الإلكترونات تهتز اجباريا ، وينتج عن ذلك انبعاث موجات كهرومغناطيسية بتردد يساوي تردد الموجة الساقطة . لتفسير ظاهرة الإمتصاص ، افترض ان هناك نوعا ما من القوة الضائعة ( المبددة) *dissipative force* ، التي لم يكن معروفا اصلها في تلك الحقبة من الزمن ، تعمل على هذه الذرات المهتزة . ويسبب تحول الطاقة الكهرومغناطيسية الساقطة الى شكل آخر لحساب هذه القوة المبددة ضياعا في الطاقة .

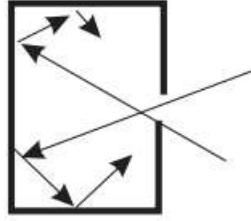
عند نهاية القرن التاسع عشر ، كانت تعتبر النظرية الكهرومغناطيسية للإشعاع هي النظرية النهائية الخاصة بالإشعاع . وفي هذا الوقت عندما كانت الفيزياء الكلاسيكية في قمة انجازاتها ، كان بعض الفيزيائيين يواجهون مسائل التي لا يمكن فهمها في إطار الفيزياء الكلاسيكية . ومن الأمثلة على هذه المسائل : تفسير الطيف الخطي المنبعث عن العناصر في الحالة الغازية ، انبعاث الإلكترونات من المعادن التي تتعرض لإشعاع علي التردد ( الظاهرة الكهروضوئية *photoelectric effect* ) ، وتوزيع الطاقة في طيف الجسم الأسود . ولفهم هذه الظواهر ، يجب تطوير وجهات نظر جديدة بخصوص طبيعة الإشعاع . وبعبارة اخرى ، يتطلب فهم الظواهر المصاحبة لتفاعل الإشعاع مع المادة تغييرا اساسيا في المفاهيم المتعلقة بطبيعة الإشعاع وتركيب المادة . نتناول في هذا الفصل دراسة هذه الظواهر التي لها صلة مباشرة مع طبيعة الضوء. كما نبين ان تفسير هذه الظواهر يتطلب اعتبار ان الإشعاع سيلا من الدقائق ، تعرف **بالكوانتا** *quanta* ، عوضا عن اعتباره امواجا . وتعرف هذه النظرية **بالنظرية الكمية للإشعاع** *quantum theory of radiation* . تاريخيا ، نشأت هذه النظرية كمحاولة لتفسير **التوزيع الطيفي** *spectral distribution* للطاقة الحرارية المنبعثة من الجسم الأسود *black body* .

## 1.2 اشعاع الجسم الأسود Black Body Radiation

في العموم ، يعتمد الإشعاع الحراري المنبعث من الجسم الساخن على تركيب ودرجة حرارة هذا الجسم . بغض النظر ، يوجد صنف من الأجسام ، تعرف بالأجسام السوداء ، التي تبعث اشعاعا حراريا الذي يعتمد في كميته وطبيعته على درجة حرارة هذه الأجسام . ولهذا السبب يسمى هذا الإشعاع المنبعث من هذه الأجسام بالإشعاع الحراري *thermal radiation* . ولأن هذه الأجسام تمتص كل الإشعاع الساقط عليها ، لذلك تدعى بالأجسام السوداء ، ومنها البلاتين الأسود والذي يكون تقريبا جسما اسودا مثاليا ( نموذجي) . عند حفظ الجسم الأسود على درجة حرارة عالية وثابتة ، يسمى الإشعاع المنبعث منه بإشعاع الجسم الأسود *black body radiation* .



في التجارب المخبرية ، تعتبر الفجوة *cavity* التي بها ثقب صغير جسما اسودا تاما لأن يسلك بطريقة مماثلة لسلوك الجسم الأسود التام . فاذا سمح لإشعاع ما بدخول هذه الفجوة ، فإنه ينعكس ذهابا وإيابا على الجدران الداخلية لهذه الفجوة ، وفي كل انعكاس يخسر جزء من طاقته . ولذلك ، وبعد عدة انعكاسات على جدران الفجوة فإنه يمتص بالكامل داخل هذه الفجوة . وعليه ، يبدو الثقب اسودا عند درجة الحرارة المنخفضة . عندما تحفظ الفجوة على درجة حرارة عالية فإن الإشعاع الخارج من هذا الثقب يكون مشابها للإشعاع المنبعث من الجسم الأسود عند نفس درجة الحرارة . وهكذا ، تعمل الفجوة ذات الثقب الأسود كجسم اسود (الشكل 1.3.1).



شكل (1.3.1) فجوة ذات ثقب صغير تمثل جسما اسودا .

### • الإنبعاثية الإشعاعية *Radiant Emittance*

تسمى القدرة المنبعثة من وحدة مساحة الجسم الأسود في كل الإتجاهات ( خلال حد الزاوية المجسمة  $2\pi$ ) بالإنبعاثية الإشعاعية ويرمز لها بالرمز  $R$  . ويتكون هذا الإشعاع المنبعث من امواج مختلفة التردد ( اطوال موجية مختلفة ) . كما تعرف القدرة المنبعثة من وحدة مساحة الجسم الأسود خلال فترة التردد  $d\omega$  ( او فترة طول موجي  $d\lambda$ ) بالإنبعاثية الإشعاعية الطيفية *spectral radiant emittance* ويشار لها بالرمز  $E_\omega$  او  $E_\lambda$  ، وتعرف رياضيا كما يلي

$$R = \int_0^{\infty} E_\omega d\omega = \int_0^{\infty} E_\lambda d\lambda \quad \dots(1.2.1)$$

كما يمكن وصف التركيب الطيفي للإشعاع بالدالة  $E(\omega, T)$  او الدالة  $E(\lambda, T)$  التي تكون دوال في التردد ( طول الموجة ) ودرجة الحرارة ، وتعرف بإسم الإنبعاثية الطيفية *spectral emittance* .

يتميز اشعاع الجسم الأسود بواسطة ما يسمى **كثافة الطاقة الطيفية**  $u(\omega, T)$  او  $u(\lambda, T)$  والتي تعرف بكثافة الطاقة الكلية  $u(T)$  عند درجة حرارة  $T$  لكل الترددات ( اطوال الموجات ) ، اي

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda \quad \dots(1.2.2)$$

كما يمكن اثبات العلاقة التالية بين الإنبعاثية الإشعاعية للجسم الأسود وكثافة الطاقة  $u$  :

$$R = (1/4) c u (\omega, T)$$

( يترك لطالب البرهان ) .

وتكون هذه العلاقة صحيحة لجميع الترددات . وعليه

$$R = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda \quad (1.2.3)$$

### (1.3) التوزيع الطيفي للطاقة في الإشعاع الحراري

#### *Spectral Distribution of Energy in Thermal Radiation*

بدأت الدراسة التجريبية للإشعاع المنبعث من الجسم الأسود بمجموعة من العلماء الألمان : لومر *lummer* ، برنجشيم *Pringsheim* ، روبنز *Rubens* و كارلبوم *Karlbaum* ، حيث قيست كثافة الطاقة الطيفية  $u_{\omega}, u_{\lambda}$  عند درجات حرارة مختلفة باستخدام مطياف خاص ، وخطت كثافة الطاقة كدالة لطول الموجة عند درجات حرارة مختلفة . وكانت نتائج هذه التجارب ( الشكل 1.3.2 ) كما يلي

(1) عند درجة حرارة مخصصة ، تزداد كثافة الطاقة الطيفية مع طول الموجة حتى تصل الى قيمة عظمى ثم تتناقص الى الصفر عند اطوال الموجات الطويلة .

(2) كلما زادت درجة الحرارة فإن طول الموجة  $\lambda_{max}$  المقابل لكثافة الطاقة العظمى ينزاح الى منطقة طول الموجة الأقصر وفقا للعلاقة التي اكتشفها العالم **فيين Wein** وهذه العلاقة هي

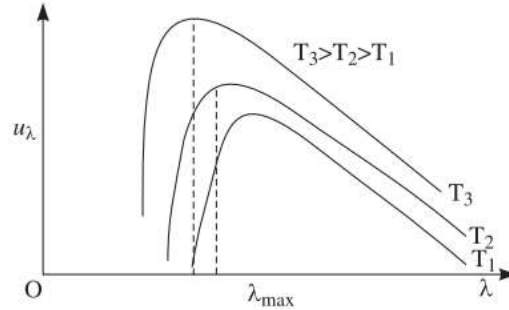
$$\lambda_{max} T = b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m-K}$$

وتعرف هذه العلاقة بقانون **ازاحة فيين Wein's displacement law** .

(3) كلما زادت درجة الحرارة فإن كثافة الطاقة الكلية  $u$  تزداد لكل اطوال الموجات . كما وجد ان كثافة الطاقة الكلية ، التي تساوي المساحة تحت المنحنى ، تتناسب مع القوة الرابعة لدرجة الحرارة ، اي

$$R = \frac{c}{4} u = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4, \quad \sigma = \text{constant}$$

وهذا يعرف بقانون ستيفان *Stefan's law*.



شكل (1.3.2) التوزيع الطيفي للطاقة .

من أجل تفسير اعتماد كثافة الطاقة الطيفية على طول الموجة ودرجة الحرارة ، تم وضع عدة فرضيات بخصوص تركيب الجسم الأسود على صعيد المستوي الذري وضرورة تفاعله مع الإشعاع .

#### (1.4) النظريات الكلاسيكية لإشعاع الجسم الأسود *Classical Theories of Black Body Radiation*

فيما يلي نتناول القوانين الخاصة بإشعاع الجسم الأسود وهي كالتالي :

##### (1.4.1) قانون فين *Wein's law*

في عام 1893 ، وضع العالم فين قانونا ينص على ان كثافة الطاقة في اشعاع الجسم الأسود تكون كما يلي

$$u(\lambda, T) d\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-c_2/\lambda T} d\lambda \quad \dots(1.4.1)$$

حيث  $c_1$  ،  $c_2$  ثوابت . بواسطة الاختيار الحقيقي لقيم هذه الثوابت ، يمكن جعل قانون فين متلائما مع المنحنى العملي في منطقة الموجات القصيرة ولكن يفشل هذا القانون في منطقة الموجات الطويلة .

##### (1.4.2) قانون ريلي – جينز *Rayleigh and Jeans Law*

حاول العالمان البريطانيان اللورد ريلي (1842-1919) و جيمس جينز (1877-1946) اشتقاق قانون افضل من قانون فين في الإشعاع على الأسس الفرضية التالية :

(i) يكون اشعاع الفجوة كهرومغناطيسيا في طبيعته. في الفجوة المعدنية التي تكون جدرانها تامة الانعكاسية، يسبب تركيب الموجات الساقطة والمنعكسة ظهور موجات ساكنة (موقوفة) *standing waves* بعقد *nodes* عند الجدران . ويكون عدد هذه الموجات الساكنة ( عدد الأنماط *modes*) لكل وحدة حجم في الفترة الترددية  $[\omega, \omega + d\omega]$  كالتالي

$$N(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad \dots(1.4.2)$$

باستخدام العلاقة:  $\omega = 2\pi c/\lambda$  و مشتقتها بالنسبة لطول الموجة ،  $|d\omega| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda$  ، يمكن اعادة كتابة معادلة (1.4.2) بدلالة  $\lambda$  كما يلي

$$N(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad \dots(1.4.3)$$

(iii) تكون **نظرية تساوي تقسيم الطاقة** صالحة في حالة الموجات الكهرومغناطيسية ايضا. ووفقا لهذه النظرية يكون مساهمة كل درجة حرية في النظام بمقدار  $\frac{1}{2} kT$  ، حيث  $k$  ثابت بولتزمان و  $T$  درجة حرارة النظام المطلقة . بما ان الموجة الساكنة تشكل نظاما بدرجتي حرية ، الأولى للمجال الكهربائي والثانية للمجال المغناطيسي ، لذلك يكون معدل طاقة كل موجة ساكنة ( او نمط) يساوي  $kT$  .

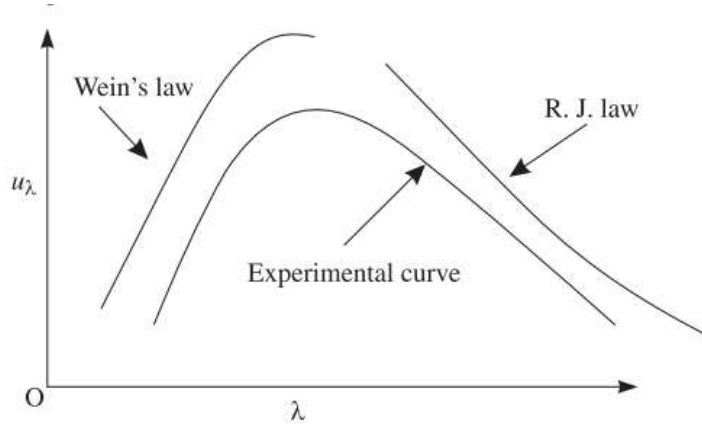
وعليه ، تكون كثافة الطاقة لإشعاع الفجوة المحفوظة عند درجة حرارة  $T$  في المدى الترددي  $[\omega, \omega + d\omega]$  كما يلي

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT d\omega \quad \dots(1.4.4)$$

وتصبح هذه المعادلة بدلالة طول الموجة كما يلي

$$u(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT d\lambda \quad \dots(1.4.5)$$

تمثل المعادلات (1.4.4 ، 1.4.5) قانون ريلي- جينز في الإشعاع الحراري . بلمحة سريعة على هذا القانون ، نجد انه يفشل في تفسير النتائج المعملية في منطقة التردد العالي . بدلا من ان تكون كثافة الطاقة محددة *finite*، يعطي هذا القانون كثافة طاقة غير محددة *infinite* في حالة الموجات فوق بنفسجية القصيرة للغاية ، الأشعة السينية ، واشعة جاما. ويسمى هذا التناقض بين القيم النظرية ( قيم القانون ) والقيم العملية بالكارثة فوق بنفسجية ( الشكل (1.4.1) .



شكل (1.4.1) مقارنة بين القوانين النظرية للإشعاع مع المنحنى التجريبي.

يعني فشل قانون ريلي- جينز ان الفرضيات الأساسية المشتقة من قوانين الفيزياء الكلاسيكية هي فاشلة ايضا ، وهذا اجبر العلم الألماني ماكس بلانك *Max Planck* ( 1858- 1947 ) للبحث عن فرضيات جديدة لا تعتمد على الفيزياء الكلاسيكية . حيث افترض ان انبعاث وامتصاص الطاقة الكهرومغناطيسية يحدث بشكل رزم ( حزم ) *packets* تسمى الكوانتا *quanta* . وهذا يمثل بداية ما يعرف بتكميم الطاقة *quantization of energy* . بالرغم من ان العالم العلمي لم يكن مستعدا لقبول نظرية بلانك الجديدة ، الا ان هذه النظرية اعترف بها بعد ان استطاع اينشتاين تفسير الظاهرة الكهروضوئية في العام 1905 . وقد حصل بلانك على جائزة نوبل في الفيزياء عام 1919 .

### (1.5) قانون بلانك في الإشعاع *Planck's Radiation Law*

افترض بلانك ان جدران الفجوة تؤلف متذبذبات مجهرية *microscopic oscillators* . في حالة التوازن الحراري ، يحدث انبعاث وامتصاص الإشعاع بواسطة هذه المتذبذبات بمعدل متساوي. ووفقا لفرضية بلانك تحدث هذه العمليات على شكل رزم منفصلة من الطاقة تدعى الفوتونات *photons* ، حيث طاقة الفوتون  $\epsilon$  تعتمد على تردد الإشعاع  $\omega$  وتكون العلاقة بينهما كما يلي

$$\epsilon = \hbar\omega$$

حيث :  $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ joule} - \text{sec}$  ،  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ، ويعرف  $h$  بثابت بلانك .

بما ان المتذبذب يستطيع امتصاص عدد كامل من الفوتونات ، لذلك تكون القيم المسموح بها لطاقة المتذبذب كالتالي

$$0, \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, \dots, n\epsilon$$

$$0, \hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega, \dots, n\hbar\omega$$

لنفرض ان  $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$  هي عدد المتذبذبات بطاقات  $0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots, n\varepsilon$  .  
وعليه ، يعطى العدد الكلي للمتذبذبات  $N$  وطاقة النظام الكلية  $E$  كالتالي

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} N_n$$

$$E = 0 N_0 + \varepsilon N_1 + 2\varepsilon N_2 + 3\varepsilon N_3 + \dots + n\varepsilon N_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon N_n$$

كما يكون عدد الأنماط modes للموجات الساكنة مساويا لعدد المتذبذبات في الجدران ، ويكون معدل الطاقة لكل نمط مساويا لمعدل طاقة المتذبذب . وبحسب احصاء مكسويل- بولتزمان يكون عدد المتذبذبات بطاقة  $\varepsilon$  متناسبا مع العامل الأسّي  $e^{-\varepsilon/kT}$  . لذلك يكون عدد المتذبذبات بطاقة  $n\varepsilon$  كالتالي

$$N_n = C e^{-n\varepsilon/kT}$$

حيث  $C$  ثابت .

يكون معدل طاقة المتذبذب كما يلي

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \frac{E}{N} = \frac{\sum_n n\varepsilon N_n}{\sum_n N_n} = \frac{\sum_n n\varepsilon e^{-n\varepsilon/kT}}{\sum_n e^{-n\varepsilon/kT}} = \frac{\sum_n n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT}} \\ &= \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}, \quad \text{where } x = \frac{\hbar\omega}{kT} \end{aligned}$$

يمكن تبسيط هذه العلاقة بالخطوات الجبرية التالية :

$$\begin{aligned}
&= -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left( \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) \\
&= -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left[ \ln(1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + \infty) \right] \\
&= -\hbar\omega \frac{d}{dx} \left( \ln \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \\
&= \hbar\omega \frac{d}{dx} \ln(1 - e^{-x}) \\
&= \hbar\omega \left( \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) \\
&= \hbar\omega \left( \frac{1}{e^x - 1} \right) \\
&= \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad \dots(1.5.1)
\end{aligned}$$

كما يكون عدد المتذبذبات في المدى الترددي  $[\omega, \omega + d\omega]$  كالتالي

$$N(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad \dots(1.5.2)$$

كما تكون كثافة الطاقة ضمن هذه الفترة الترددية كالتالي

$$u(\omega, T)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega \quad \dots(1.5.3)$$

بدلالة طول الموجة ، يمكن كتابة معادلة (1.5.3) كما يلي

$$u(\lambda, T) = \frac{16\pi^2 hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{2\pi hc/\lambda kT} - 1} d\lambda \quad \dots(1.5.4)$$

تسمى المعادلات (1.5.3 و 1.5.4) قوانين بلانك في الإشعاع . وهي تتفق مع المشاهدات المعملية لجميع اطوال الموجات وعند كل درجات الحرارة .

كما يؤول معدل طاقة المتذبذب الى قيمة تساوي  $kT$  ، والتي تساوي القيمة الكلاسيكية ، عندما  $\hbar \rightarrow 0$  . ويمكن اثبات ذلك كما يلي

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon \rangle &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left( \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} \right) \\
&= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar \omega}{\left( 1 + \frac{\hbar \omega}{kT} + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar \omega}{kT} \right)^2 + \dots \right) - 1} \\
&= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar \omega}{\hbar \omega / kT} \\
&= kT
\end{aligned}$$

• حالات المنتهى لقانون بلانك الإشعاعي **Limiting cases of Planck's radiation law**

(1) اذا كان  $\hbar \omega / kT \ll 1$

باستخدام مفكوك الدالة الأسية التقريبي ، تصبح معادلة (1.5.3) كما يلي

$$\begin{aligned}
u(\omega) d\omega &= \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{1 + \frac{\hbar \omega}{kT} + \dots} \frac{1}{-1} d\omega \\
&= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT d\omega
\end{aligned}$$

وهذا قانون ريلي-جينز .

(2) اذا كان  $\hbar \omega / kT \gg 1$  ، تصبح معادلة (1.5.3) عند استخدام تقريب الدالة الأسية كما يلي

$$\begin{aligned}
u(\omega) d\omega &= \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega / kT}} d\omega = c_1 \omega^3 e^{-c_2 / \lambda T} d\omega \\
&= \frac{c_1}{\lambda^5} [\exp(-c_2 / \lambda T)] d\lambda
\end{aligned}$$



وهذا قانون قين .

## Deduction of Stefan's Law from Planck Law

(1.6) استنتاج قانون ستيفان من قانون بلانك

تكون الإنبعاثية الإشعاعية ( الطاقة المنبعثة من وحدة المساحة في وحدة الزمن لكل اطوال الموجة ) للجسم الأسود كما يلي

$$R = \frac{cu}{4}$$

$$R = \frac{c}{4} \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

$$= \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad \text{where } x = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$= \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^4 \left( \frac{\pi^4}{15} \right)$$

$$= \left( \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} \right) T^4$$

$$= \sigma T^4$$

حيث قيمة الثابت  $\sigma$  تساوي

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.57 \times 10^{-8} \frac{\text{watt}}{\text{m}^2 \text{K}^4}.$$

(1.7) استنتاج قانون ازاحة فين *Deduction of Wein's Displacement Law*

ليكن طول الموجة  $\lambda_{max}$  يقابل كثافة الطاقة العظمى وهو حل المعادلة التالية :

$$\frac{d}{d\lambda} u(\lambda, T) = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{2\pi\hbar c/\lambda kT} - 1} \right]_{\lambda=\lambda_{max}} = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{x^5}{e^x - 1} \right] = 0, \quad \text{where } x = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{x^5}{e^x - 1} \right] \frac{dx}{d\lambda} = 0$$

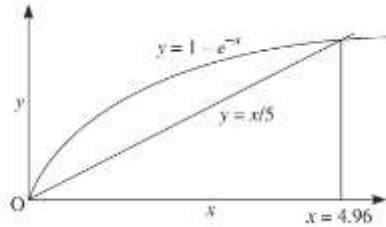
$$\left( \frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} \right) x^2 = 0$$

بترتيب الحدود جبريا ، نحصل على

$$5(e^x - 1) - x e^x = 0$$

$$1 - e^{-x} = \frac{x}{5} \quad \dots(1.7.1)$$

بيانيا ، يمكن حل معادلة (1.7.1) برسم منحنيات المعادلتين :  $y = 1 - e^{-x}$  ،  $y = x/5$  ( الشكل 1.7.1 ) .



شكل (1.7.1) الحل البياني للمنحنيين السابقين .

من الشكل ، نجد ان نقطة تقاطع المنحنيين تكون عند  $x = 4.96$  ، اي

$$\left( \frac{2\pi hc}{\lambda kT} \right)_{\lambda_{\max}} = 4.96$$

$$\lambda_{\max} T = \frac{2\pi hc}{4.96k} = b \quad \dots(1.7.2)$$

حيث الثابت  $b$  يعرف بثابت فين وتساوي قيمته المقدار  $b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m.K}$

## أمثلة

(1) (a) احسب معدل طاقة متذبذب بلانك عند القيم التالية :

$$\hbar\omega/kT = 0.01, 0.1, 1.0, 10.$$

(b) استخدم قانون بلانك في الإشعاع لإيجاد القدرة المشعة من وحدة مساحة جسم اسود من خلال مدى ضيق من طول الموجة  $\Delta\lambda = 1.0 \text{ nm}$  والقريب من القيمة العظمى لكثافة الإشعاع الطيفية عند درجة حرارة  $3000^0\text{K}$ ؟

الحل

(a) يعطى معدل طاقة متذبذب بلانك بالعلاقة التالية

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{(\hbar\omega/kT)}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} kT$$

بتعويض القيم المعطاة في المسألة ، نحصل على

$$\langle \epsilon \rangle = kT, 0.95 kT, 0.58 kT, 0.00045 kT.$$

(b) باستخدام قانون فين  $\lambda T = b \text{ K}$  ، يمكن كتابة قانون كثافة الطاقة الطيفية كما يلي

$$u(T) = \frac{16\pi^2 \hbar c T^5}{b^5} \frac{1}{e^{2\pi\hbar c / b\lambda} - 1}$$

وعليه ، تكون القدرة المشعة من كل وحدة مساحة في فترة طول الموجة  $\Delta\lambda$  كما يلي

$$P = \frac{cu}{4} = \frac{4\pi^2 \hbar c^2 T^5}{b^5} \frac{1}{e^{2\pi\hbar c / b\lambda} - 1} \Delta\lambda$$

بتعويض القيم المعطاة في المسألة ، نحصل على

$$P = 3100 \text{ W/m}^2.$$

(2) احسب عدد الأنماط في مكعب طول ضلعه  $2 \text{ cm}$  ضمن مدى طول موجة  $[4995A^0 - 5005A^0]$

ثم جد ااطاقة الكلية المشعة في الفجوة ضمن هذا المدى ؟ علما ان الفجوة محفوظة عند درجة حرارة

$$1500^0 \text{ K}$$

## الحل

عدد الأنماط يساوي

$$dN = \frac{8\pi}{\lambda^4} V d\lambda = \frac{8 \times 3.14 \times (2 \times 10^{-2} \text{ m})^3 (10 \times 10^{-10} \text{ m})}{(5000 \times 10^{-10} \text{ m})^4}$$
$$= 3.215 \times 10^{11}.$$

كثافة الطاقة هي

$$U(\lambda, T) = dN kT d\lambda$$
$$= (3.215 \times 10^{11})(1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1})(1500 \text{ K})$$
$$= 6.65 \times 10^{-9} \text{ J}.$$

(3) يتكون نظام متذبذب من زنبرك به كتلة معلقة قدرها  $0.1 \text{ kg}$  ، اذا كان ثابت الزنبرك يساوي  $10 \text{ N/m}$  وكانت سعة الذبذبة تساوي  $0.1 \text{ m}$  ،

(a) اذا كانت طاقة هذا المتذبذب مكممة ، احسب العدد الكمي  $n$  المرافق لهذه الطاقة ؟

(b) اذا تغير العدد الكمي  $n$  بمقدار 1 ، احسب التغير الكسري للطاقة ؟

(c) ما النتيجة المستخلصة من هذا المثال ؟

## الحل

(a) تردد المتذبذب هو

$$\omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/s}.$$

طاقة المتذبذب الكلاسيكية هي

$$E = (1/2)kA^2 = 0.05 \text{ J}.$$

العدد الكمي المرافق لهذه الطاقة يساوي

$$n = E/(\hbar\omega) = 10^{31}$$

وهذا العدد كبير جدا .

(b) اذا تغير  $n$  بمقدار وحدة واحدة ، يكون التغير الكسري للطاقة كما يلي

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta n \hbar \omega}{n \hbar \omega} = \frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{n} = 10^{-31}$$

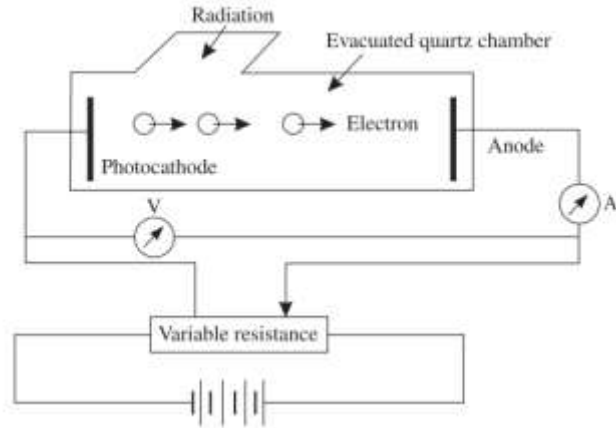
وهذا المقدار صغير جدا .

(c) يشير هذا المثال الى ان مستويات طاقة المتذبذب العياني تكون قريبة من بعضها الى درجة تجعل من اية اداة متناهية في الدقة عاجزة عن التفريق بينها ( اي انه لا يمكن اعتبار مستويات الطاقة مكممة ). وهذا يعزى الى تناهي صغر مقدار ثابت بلانك ، وبعبارة اخرى عندما  $\lim \hbar \Rightarrow 0$  ، تصبح مستويات الطاقة متصلة ( مستمرة ).

### (1.8) الظاهرة الكهروضوئية Photoelectric Effect

تسمى عملية انبعاث الإلكترونات من المادة بفعل سقوط الضوء عليها بالظاهرة الكهروضوئية . وتم اكتشاف هذه الظاهرة في عام 1887 على يد العالم الألماني هيرتز Hertz . من سخرية القدر ان هيرتز ، الذي اشار الى وجود الموجات الكهرومغناطيسية ، اكتشف هذه الظاهرة التي لا يمكن تفسيرها بدلالة الطبيعة الموجية للضوء .

يمكن دراسة هذه الظاهرة باستخدام الجهاز المبين في الشكل (1.8.1)، الذي يتكون من انبوبة زجاجية مفرغة يوجد بها مجسان A, B . ويسمح للضوء بدخول هذه الأنبوبة من خلال فتحة كوراثيزية ليسقط على المجس A ، الذي يسمى بالمهبط cathode . كما يحفظ المجس B المسمى بالمصدر Anode عند جهد موجب او سالب بالنسبة للمهبط . كما يوصل اميتر حساس في الدائرة لتسجيل التيار الكهربائي الناتج عن الإلكترونات الضوئية المنبعثة من المهبط . ويقاس فرق الجهد بين المهبط والمصدر بجهاز الفولتميتر .



شكل (1.8.1) رسم تخطيطي لجهاز دراسة الظاهرة الكهروضوئية.

يمكن تلخيص الملاحظات التجريبية للظاهرة الكهروضوئية كما يلي

(1) لفرق الجهد الثابت بين المهبط والمصدر ، يزداد عدد الإلكترونات المنبعثة من المهبط ( التيار الكهروضوئي) بإزدياد شدة الإشعاع الساقط عليه.

(2) عند ثبوت شدة وتردد الإشعاع الساقط ، تتغير قيمة التيار الكهروضوئي مع تغير فرق الجهد بين المهبط والمصدر  $V$  الى ان تبلغ قيمة معينة ثابتة ، وبعدها لا تتغير مهما ازدادت قيمة فرق الجهد. ومن ناحية اخرى ، اذا جعلنا الصفيحة B اكثر فأكثر سالبية *more negative* بالنسبة لسطح المهبط فإن التيار يزداد . في هذه الحالة ، يسمى جهد الصفيحة السالب ( بالنسبة للمهبط) **بجهد الإعاقة *retarding potential*** . وهناك قيمة خاصة لجهد الإعاقة تجعل شدة التيار الكهروضوئي صفرا ، وتسمى هذه القيمة **بجهد القطع او جهد الإيقاف *cut- off or stopping potential*** ، ويشار اليه بالرمز  $V_0$  وهو مقياس لطاقة الإلكترونات الضوئية الحركية العظمى . اي

$$T_{max} = eV_0$$

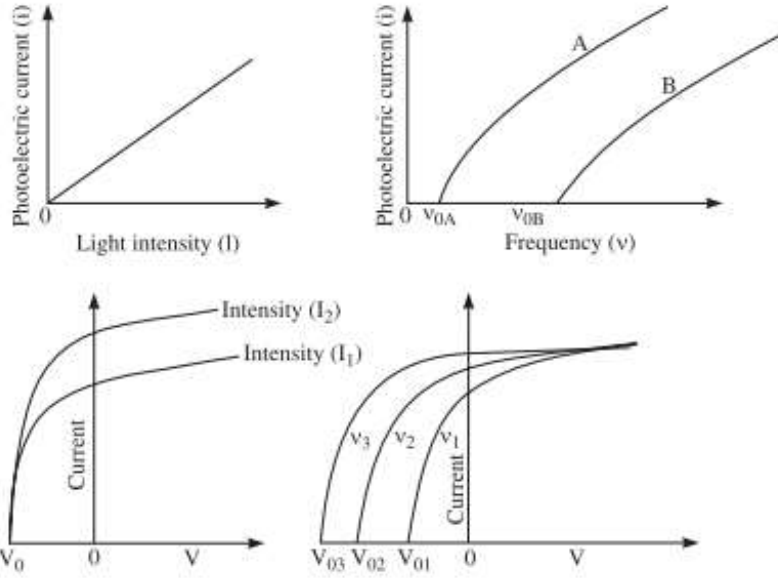
حيث  $T_{max}$  تساوي الطاقة الحركية العظمى للإلكترونات الضوئية المنبعثة .

(3) لا يعتمد جهد القطع وكذلك الطاقة الحركية العظمى للإلكترونات الضوئية على شدة الضوء الساقط ولكنها تعتمد على تردد الشعاع الضوئي الساقط  $\omega$  .

(4) يوجد لكل مادة تردد مميز  $\omega_0$  بحيث اذا سقط شعاع ضوئي على هذه المادة بتردد اقل من هذه القيمة فإنه لا ينبعث من سطح هذه المادة إلكترونات ضوئية . يسمى هذا التردد بتردد **العتبة او البدء *threshold frequency*** ، كما يسمى طول الموجة المقابلة لهذا التردد بطول موجة البدء  $\lambda_0$  .

(5) كما لوحظ انه في لحظة سقوط الضوء على سطح المادة ، فإنه تنبعث في نفس الوقت وبدون تأخير إلكترونات ضوئية .

يمكن توضيح الملاحظات السابقة بيانيا كما في الشكل (1.8.2)



شكل (1.8.2) تغير التيار الكهروضوئي مع شدة الضوء الساقط، تردده ، والجهد المسارع .

فشلت الفيزياء الكلاسيكية في تفسير الظاهرة الكهروضوئية التي لا يمكن فهمها بدلالة النموذج الموجي للإشعاع . وفقا للمبادئ الفيزياء الكلاسيكية ، يتألف الضوء من مجالات كهربية ومغناطيسية متذبذبة ، وتناسب شدة الإشعاع مع مربع متجه المجال الكهربائي  $E$  . وتكون القوة المؤثرة على إلكترونات المادة بفعل الشعاع الساقط عليها تساوي  $eE$  ، حيث  $e$  شحنة الإلكترون ، ولذلك تعتمد الطاقة الحركية للإلكترونات المنطلقة من المادة على شدة الإشعاع ولكن هذا الإستنتاج يتناقض مع النتائج العملية . إضافة لذلك ، لا تعطي الفيزياء الكلاسيكية تفسيراً لوجود تردد البدء . أيضاً ، وحسب النظرية الكلاسيكية يجب ان يكون هناك فترة زمنية بين سقوط الأشعاع على المادة وانطلاق الإلكترونات منها ، وهذا يتعارض مع الملاحظات العملية السابقة الذكر . لذلك ، يمكن اعتبار اي محاولة لتفسير الظاهرة الكهروضوئية في إطار الفيزياء الكلاسيكية عبثية .

### • تفسير اينشتين للظاهرة الكهروضوئية

في عام 1905 ، اقترح البرت اينشتين تفسيراً مقنعاً للظاهرة الكهروضوئية ، حيث اعتبر ان الإشعاع الكهرومغناطيسي ذي التردد  $\omega$  يتألف من رزم صغيرة ( فوتونات ) ويملك كل فوتون طاقة تساوي  $h\omega$  . وعند سقوط هذه الطاقة على سطح المادة فإن قسماً منها يستخدم لتحرير الإلكترون والقسم الباقي يحمله هذا الإلكترون المنطلق كطاقة حركية ، علماً ان الإلكترونات السطحية في المادة تكون مقيدة مع ذرات المادة بشكل ضعيف مما يتطلب طاقة قليلة لتحريرها . وتسمى هذه الطاقة اللازمة للتحرير **بدالة شغل المادة**  $work$   $function$  ويشار إليها بالرمز  $\phi$  . وعليه ، تكون الطاقة الحركية العظمى للإلكترونات المنبعثة من سطح المادة كما يلي



$$T_{\max} = \hbar\omega - \phi = (2\pi\hbar c/\lambda) - \phi \quad \dots(1.8.1)$$

من هذه المعادلة ، نجد ان الإلكترونات، التي تكون مقيدة بشدة مع ذراتها ، تنطلق بطاقة حركية اقل من تلك الضعيفة الارتباط . هكذا ، تعتمد طاقة حركة الإلكترونات المنبعثة من المادة على كونها سطحية او عميقة بداخل هذه المادة .

اذا كانت  $\omega_0$  هي تردد الإشعاع بحيث تكون طاقة الفوتون  $\hbar\omega_0$  كافية فقط لإطلاق الكترون من المادة بطاقة حركية صفرية ، فإن قانون حفظ الطاقة يعطي التالي

$$\hbar\omega_0 = \phi \quad \text{or} \quad 2\pi\hbar c/\lambda_0 = \phi$$

من هنا نجد ان طول موجة البدء ( العتبة ) هي مقياس لدالة شغل المادة . وبدلالة تردد الإشعاع وتردد البدء ، يمكن ان نعبر عن معادلة اينشتين الكهروضوئية بالصورة التالية

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \hbar\omega - \hbar\omega_0 \\ &= 2\pi\hbar c [(1/\lambda) - (1/\lambda_0)] \end{aligned} \quad \dots(1.8.2)$$

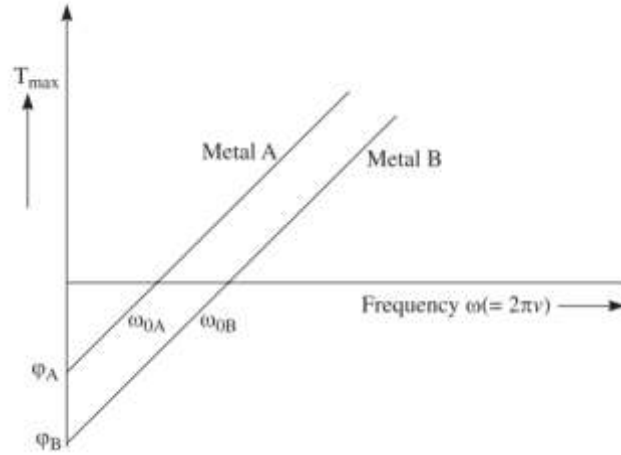
اذا كان جهد الأيقاف المقابل لأشعاع ساقط طول موجته  $\lambda$  فإن الطاقة الحركية العظمى للإلكترون المنبعث من المادة تعطى كما يلي

$$T_{\max} = eV_0 = 2\pi\hbar c [(1/\lambda) - (1/\lambda_0)] \quad \dots(1.8.3)$$

من هذه المعادلة ، نجد مدى اعتماد الطاقة الحركية العظمى للإلكترونات الضوئية على تردد ( طول موجة ) الإشعاع الساقط . بزيادة شدة الإشعاع الساقط ، نزيد فقط عدد الفوتونات فيه وليس مقدار طاقتها ، ويترتب على ذلك زيادة احتمال تصادم هذه الفوتونات مع الإلكترونات ولهذا يزداد عدد الإلكترونات الضوئية المنطلقة من المادة. وهذا يفسر اعتماد التيار الكهروضوئي على شدة الإشعاع الساقط . وبما ان طاقة الفوتونات تتركز في منطقة صغيرة جدا وتتحرك هذه الفوتونات بسرعة الضوء ، فإن طاقة الفوتون تتحول الى الإلكترونات بدون اي ان يكون هناك اي تخلف او تأخير زمني *time lag* بين حدوث السقوط وانبعث الإلكترون .

#### • برهان ميليكان لمعادلة اينشتين

استطاع العالم ميليكان اثبات صحة العلاقة الخطية بين تردد الإشعاع الساقط والطاقة الحركية العظمى  $T_{\max}$  او  $eV_0$  للإلكترونات المنبعثة من المادة . وذلك من خلال تجربة حيث إستخدام فيها مواد مختلفة كهدف *Target* واسقاط شعاع ضوئي بترددات مختلفة عليها ومن ثم قياس جهد الإيقاف المقابل لكل حالة . وبحسب التوقعات ، فقد وجد ان المنحنى المرسوم بين قيم  $\omega$  و  $eV_0$  يكون خطا مستقيما ميله يعطي قيمة ثابت بلانك ، وتعطي نقطة تقاطعه مع محور الطاقة دالة الشغل لمادة الهدف ( الشكل 1.8.3 )



شكل (1.8.3) تغير طاقة الإلكترونات الضوئية الحركية مع تردد الضوء الساقط .

(4) اثبت ان

$$ch = 2\pi\hbar c = 12400 \text{ eV } \text{\AA} = 1240 \text{ eV nm}$$

الحل

$$\begin{aligned} ch = 2\pi\hbar c &= \frac{(6.625 \times 10^{-34} \text{ Js})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} \\ &= 12421 \times 10^{-10} \text{ eV m} \\ &= 12400 \text{ eV } \text{\AA} = 1240 \text{ eV nm}. \end{aligned}$$

(5) يسقط ضوء طول موجته  $2000 \text{ \AA}$  على سطح من مادة الألمنيوم ، الذي دالة شغله تساوي  $4.2 \text{ eV}$  . احسب ما يلي: (a) طاقة الإلكترونات الضوئية الحركية العظمى ؟

(b) طاقة الإلكترونات الضوئية الحركية الصغرى؟

(c) طول موجة القطع ؟.

(d) جهد الإيقاف ؟

الحل

(a)

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \hbar\omega - \phi = (2\pi\hbar c/\lambda) - \phi \\ &= \frac{12400 \text{ eV } \text{\AA}}{2000 \text{ \AA}} - 4.2 \text{ eV} = 2.0 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$T_{\min} = 0 \quad \text{(b)}$$

(c) تردد البدء هو

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{\phi} = \frac{12400 \text{ eV } \text{\AA}}{4.2 \text{ eV}} = 5950 \text{ \AA}$$

(d) جهد الأيقاف = دالة الشغل = 2 volt

(6) في تجربة الظاهرة الكهروضوئية ، وجد ان عند سقوط ضوء على سطح مادة ما بطول موجة  $4000 \text{ \AA}$  يكون جهد الأيقاف 2.0 volts ، بينما للضوء الساقط بطول موجة تساوي  $1000 \text{ \AA}$  يكون جهد الأيقاف 0.1 volt . جد دالة شغل المادة وثابت بلانك ؟

الحل

نفرض ان

$$\lambda_2 = 6000 \text{ \AA}, V_2 = 1.0 \text{ volt}$$

تكون معادلة اينشتين الكهروضوئية في الحالتين كالتالي

$$eV_1 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - \phi \quad \dots(1)$$

$$eV_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} - \phi \quad \dots(2)$$

ب طرح المعادلتين ، نحصل على

$$e(V_1 - V_2) = 2\pi\hbar c \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

اذن

$$2\pi\hbar c = \frac{e(V_1 - V_2)}{c} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

بتعويض القيم المعطاة في السؤال ، نحصل على

$$h = 2\pi\hbar = 6.4 \times 10^{-34} \text{ J-s}$$

وتكون قيمة دالة شغل المادة كما يلي

$$\phi = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - eV_1 = \frac{12400 \text{ eV \AA}}{4000 \text{ \AA}} - 2.0 \text{ eV} = 1.1 \text{ eV}.$$

(7) عين اي من المواد التالية يمكن استخدامها لتصميم خلية كهروضوئية تعمل بالضوء المرئي؟.

*Tantalum* ( $\phi = 4.2 \text{ eV}$ ), *Tungsten* ( $\phi = 4.5 \text{ eV}$ ), *Aluminium* ( $\phi = 4.2 \text{ eV}$ ), *Barium* ( $\phi = 2.5 \text{ eV}$ ),  
*Lithium* ( $2.3 \text{ eV}$ ).

**الحل**

حتى نحصل على الظاهرة الكهروضوئية يجب تحقق الشرط التالي :

$$\lambda \leq \lambda_0 = 2\pi\hbar c/\phi.$$

نحسب تردد البدء لكل مادة معطاة كما يلي

$$\begin{aligned} \text{For tantalum } \lambda_0 &= 2\pi\hbar c/\phi = (12400 \text{ eV \AA})/4.2 \text{ eV} = 2952 \text{ \AA} \\ \text{Tungsten } \lambda_0 &= 2755 \text{ \AA} \\ \text{Aluminium } \lambda_0 &= 2952 \text{ \AA} \\ \text{Barium } \lambda_0 &= 4960 \text{ \AA} \\ \text{Lithium } \lambda_0 &= 5391 \text{ \AA} \end{aligned}$$

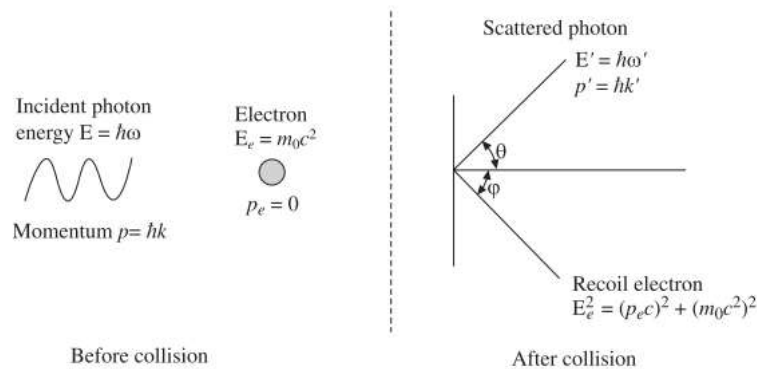
من المعلوم ان طول موجة الضوء المرئي تقع ضمن المدى  $[4000 \text{ \AA} - 8000 \text{ \AA}]$ ، وبما ان طول موجة البدء لمادة الباريوم *Barium* و الليثيوم *Lithium* واقعة ضمن هذا المدى ، لذلك يمكن ان تستخدم هذه المواد في الخلية الضوئية .

## (1.9) ظاهرة كومبتون *Compton effect*

اعطت نظرية بلانك لإشعاع الجسم الأسود دليلا غير مباشر للطبيعة الكمية في الإشعاع ، والتي اصبحت اكثر وضوحا عند تفسير اينشتين للظاهرة الكهروضوئية . لكن الدليل الواضح على الطبيعة الجسيمية للإشعاع كان في عام 1922 على يد العالم الفيزيائي الأمريكي ارثر كومبتون ، وذلك عندما كان يبحث في عملية تشتت الأشعة السينية خلال المواد المختلفة . فقد لاحظ ان الأشعة المنتشرة ، بالإضافة الى الإشعاع الأصلي الذي طول موجته  $\lambda$  ، تحتوي على اشعة اخرى بطول موجة اكبر  $\lambda'$  . وعرفت هذه الظاهرة بظاهرة كومبتون ، كما سمي الفرق بين طولي موجة الإشعاعين ،  $\Delta\lambda$  ، انزياح كومبتون *Compton shift* . كما وجد ان هذا الانزياح يعتمد على الزاوية  $\theta$  المحصورة بين اتجاه الإشعاع المنتشت واتجاه الإشعاع الأصلي ( قبل التشتت) . وان مقدار  $\Delta\lambda$  لا يتوقف على طول الموجة  $\lambda$  ولا على نوع المادة المشتتة .

وفقا لنموذج الإشعاع الكلاسيكي ، تجبر مجالات الإشعاع الكهربائية والمغناطيسية المتذبذبة الإلكترونات ذات الارتباط الذري الضعيف على التذبذب بتردد يساوي تردد هذه المجالات ، وعليه تبدأ هذه الإلكترونات بأشعاع موجات كهرومغناطيسية مشابهة لتلك الساقطة . وبناء على ذلك ، يشير النموذج الكلاسيكي الى وجود ما يعرف بالإشعاع غير المعدل *unmodified radiation* . اما حصول عملية التعديل الإشعاعي بوجود اشعاع جديد بطول موجة اطول في عملية التشتت هذه ، فلا يمكن فهمه من خلال اسس النموذج الموجي للإشعاع .

بينما نجد ان نظرية الإشعاع الكمية تعطي فهما واضحا لظاهرة تشتت كومبتون. وفقا لهذه النظرية ، تتكون حزمة الأشعة السينية وحيدة اللون *monochromatic beam* من فوتونات بطاقة  $\omega\hbar$  وزخم خطي  $\hbar k$  ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) . ويمكن تفسير تشتت كومبتون باعتبار ان العملية تشبه عملية التصادم المرن لفوتونات الإشعة السينية مع الإلكترونات الحرة في المادة المشتتة . وخلال هذا التصادم ينتقل قسم من طاقة الفوتون الى طاقة الإلكترون ولذلك تصبح طاقة الفوتون المنتشت اقل من طاقته قبل التصادم ( اي ينخفض تردده او تزداد طول موجته) ، ويرتد الإلكترون في اتجاه آخر ( الشكل (1.9.1) .



شكل (1.9.1) تشتت كومبتون .

لنفرض ان طاقة وزخم الفوتون المنتشتت هما:  $\hbar\omega'$  ،  $\hbar k'$  على الترتيب ، وان الإلكترون ساكنا قبل التصادم ، لذلك تكون طاقة الإلكترون وزخمه الخطي :  $m_0c^2, 0$  على الترتيب. ولنفرض ان بعد التصادم اصبح لهذا الإلكترون زخما خطيا  $p_e$  ، وعليه تصبح طاقته  $\sqrt{(p_e c)^2 + (m_0 c^2)^2}$  .

باستخدام قانون حفظ الطاقة ، نحصل على ما يلي

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p_e^2 + m_0^2c^2} \quad \dots(1.9.1)$$

بينما يكون قانون حفظ الزخم الخطي بالصورة المتجهة كما يلي

$$\hbar k = p_e + \hbar k' \quad \dots(1.9.2)$$

يمكن ترتيب معادلة (1.9.1) على النحو التالي

$$\begin{aligned} p_e^2 + m_0^2c^2 &= \left[ \left( \frac{\hbar\omega}{c} - \frac{\hbar\omega'}{c} \right) + m_0c \right]^2 \\ &= [(\hbar k - \hbar k') + m_0c]^2 \\ p_e^2 &= \hbar^2(k^2 - 2kk' + k'^2) + 2m_0c\hbar(k - k') \end{aligned} \quad \dots(1.9.3)$$

كما يمكن ترتيب معادلة (1.9.2) على النحو التالي

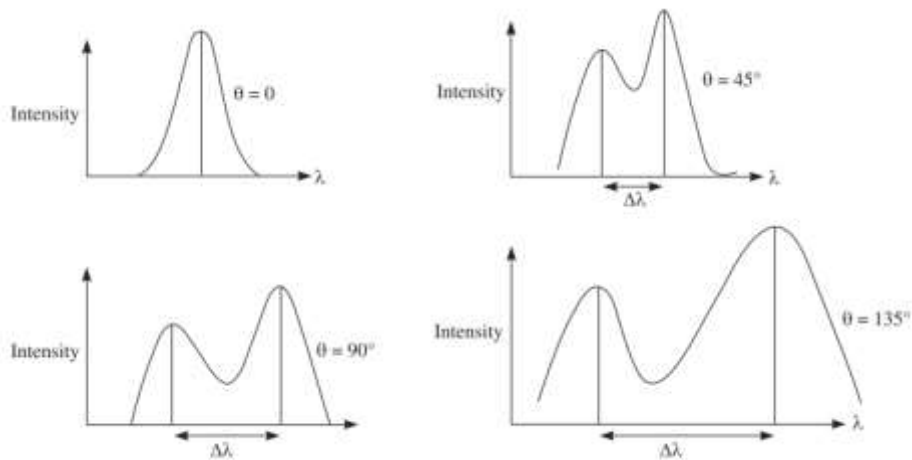
$$p_e^2 = \hbar^2(\bar{k} - \bar{k}')^2 = \hbar^2(k^2 - 2kk' \cos\theta + k'^2) \quad \dots(1.9.4)$$

من معادلتني (1.9.3) - (1.9.4) ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} m_0c(k - k') &= \hbar k k' (1 - \cos\theta) \\ \frac{k - k'}{kk'} &= \frac{\hbar}{m_0c} (1 - \cos\theta) \\ \frac{1}{k'} - \frac{1}{k} &= \frac{\hbar}{m_0c} (1 - \cos\theta) \\ \lambda' - \lambda &= \frac{2\pi\hbar}{m_0c} (1 - \cos\theta) = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\theta) \\ \Delta\lambda &= \lambda_c (1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad \dots(1.9.5)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c} = 0.0243 \text{ \AA} \quad \dots(1.9.6)$$

تسمى الكمية  $\lambda_c$  بطول موجة الكترون كومبتون *Compton wavelength of electron* ، وهي طول موجة الإشعاع ذي الفوتون الذي يملك طاقة تساوي طاقة سكون الإلكترون . تبين معادلة (1.9.5) ان ازاحة كومبتون  $\Delta\lambda$  لا تعتمد على طول موجة الإشعاع الساقط ولا على طبيعة مادة الهدف، ولكن تعتمد على زاوية التشتت ( الشكل 1.9.2). فمثلا ، في حالة التشتت الأمامي ( $\theta = 0$ ) ، تكون ازاحة كومبتون صفرا ، بينما في حالة التشتت الخلفي ( $\theta = \pi$ ) ، تكون هذه الإزاحة عظمى وتساوي  $2\lambda_c$  . وعند  $\theta = \pi/2$  ، تكون هذه الإزاحة كما يلي :  $\Delta\lambda = \left(\frac{\hbar}{m_0 c}\right) = \lambda_c$  .



شكل (1.9.2) تغير ازاحة كومبتون مع زاوية التشتت .

اماعند تصادم الفوتونات مع الإلكترونات التي تكون مقيدة بشدة عالية بذرات مادة الهدف ، فإن كل طاقة وزخم هذه الفوتونات تتحول الى هذه الذرات . وحيث ان كتلة ذرة مادة الهدف اكبر بكثير من كتلة الإلكترونات ، لذلك تكون ازاحة كومبتون كمية صغيرة الى حد يمكن اهمالها ، وعليه تكون  $\lambda \cong \lambda'$  . وهذا يفسر عدم ملاحظة هذه الظاهرة لكل زوايا التشتت .

• **طاقة الفوتون المتشتت *Energy of Scattered Photon***

لإيجاد طاقة الفوتون المتشتت  $E'$  نستخدم معادلة ازاحة كومبتون (معادلة 1.9.5) ونعبر عن طول موجة الفوتون بدلالة طاقته على النحو التالي

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{2\pi\hbar c}{E'} - \frac{2\pi\hbar c}{E} = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}(2\sin^2\theta/2)$$

حيث استخدمت العلاقة المثلثية التالية :  $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

وبترتيب هذه المعادلة نحصل على ما يلي

$$E' = \frac{E}{1 + \left(\frac{2E}{m_0c^2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad \dots(1.9.7)$$

من معادلة (1.9.7) نجد ان الطاقة الصغرى للفوتون المتشتت تكون عند  $\theta = 180^\circ$  اي ،

$$E'_{\min} = \frac{E}{1 + \left(\frac{2E}{m_0c^2}\right)} \quad \dots(1.9.8)$$

كما تكون طاقة هذا الفوتون عظمى عند  $\theta = 0$  اي ،  $E'_{\max} = E$

• **الطاقة الحركية لإلكترون كومبتون *Kinetic energy of Compton electron***

باستخدام قانون حفظ الطاقة ، تكون الطاقة الحركية الممنوحة للإلكترون المرتد في عملية تشتت كومبتون كما يلي

$$T = \hbar\omega - \hbar\omega' = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda'} = 2\pi\hbar c \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\right) = \hbar c \frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} \quad \dots(1.9.9)$$

بدلالة الطاقة الابتدائية للفوتون  $E$  ، يمكن ان نعبر عن الطاقة الحركية لهذا الإلكترون كما يلي



$$T = E - E' = E - \frac{E}{1 + \left( \frac{2E}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$T = \frac{\frac{2E^2}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{2E}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad \dots(1.9.10)$$

من هذه المعادلة ، نجد ان إلكترون كومبتون يكتسب طاقة حركية عظمى عند زاوية التشتت  $\theta = 180^\circ$  . اي ،

$$T_{\max} = \frac{\left( \frac{2E}{m_0 c^2} \right)}{1 + \left( \frac{2E}{m_0 c^2} \right)}, \quad \theta = 180^\circ \quad \dots(1.9.11)$$

كما تكون طاقته الحركية صغرى عند  $\theta = 0$  . اي ،  $T_{\min} = 0$  .

#### • اتجاه الإلكترون المرتد *Recoil direction of electron*

اذا تحرك الكترون كومبتون في اتجاه يصنع زاوية  $\varphi$  مع اتجاه سقوط الفوتون ، فإن قانون حفظ مركبات الزخم الخطي في اتجاهي محوري  $x, y$  يعطي ما يلي

$$p_e \cos \varphi + p' \cos \theta = p$$

$$p_e \sin \varphi = p' \sin \theta$$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة للزاوية  $\varphi$  ، نحصل على التالي

$$\tan \varphi = \frac{p' \sin \theta}{p - p' \cos \theta} = \frac{E' \sin \theta}{E - E' \cos \theta}$$

#### تمارين محلولة

(8) تنشنت اشعة سينية طول موجتها  $1.0 \text{ \AA}$  بواسطة قطعة كربونية . فإذا لوحظ ان الإشعاع المتشتت في الإتجاهات التالية :  $60^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  ، جد

(a) ازاحة كومبتون. (b) الطاقة الحركية للإلكترون المرتد. ؟

## الحل

(a) ازاحة كومبتون هي

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

بالتعويض في هذه المعادلة ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_{60} &= \lambda_c(1 - \cos 60^\circ) = 0.5\lambda_c = 0.012 \text{ \AA} \\ \Delta\lambda_{90} &= \lambda_c(1 - \cos 90^\circ) = \lambda_c = 0.024 \text{ \AA} \\ \Delta\lambda_{180} &= \lambda_c(1 - \cos 180^\circ) = 2\lambda_c = 0.048 \text{ \AA}\end{aligned}$$

(b) طاقة الإلكترون المرتد الحركية هي

$$T = E - E' = ch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \frac{ch}{\lambda} \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}\right)$$

بالتعويض ، نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned}(i) \quad T &= \frac{12400 \text{ eV\AA}}{1.00 \text{ \AA}} \left(\frac{0.012 \text{ \AA}}{1.012 \text{ \AA}}\right) = 147 \text{ eV} \\ (ii) \quad T &= 290 \text{ eV} \\ (iii) \quad T &= 568 \text{ eV}\end{aligned}$$

(9) جد طول موجة الفوتون الساقط في تجربة تشتت كومبتون اذا كانت طاقة الفوتون المتشتت تساوي نصف طاقة هذا الفوتون ، علما بان زاوية التشتت تساوي  $45^\circ$  . ثم حدد المنطقة من الطيف الكهرومغناطيسي والتي يقع فيها هذا الفوتون الساقط .؟

## الحل

بما ان  $E' = E/2$  ، لذلك تكون  $\lambda' = 2\lambda$  ، وتكون ازاحة كومبتون كالتالي:  $\Delta\lambda = \lambda$  . حيث ان

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos 45^\circ)$$

بالتعويض ، نجد ان

$$\lambda = \lambda_c (1 - 1/\sqrt{2}) = 0.0071 \text{ \AA} \text{ (gamma ray)}$$

(10) اذا تشتت فوتون طاقته  $1.00 \text{ MeV}$  بواسطة الكترون ساكن ، جد الطاقة الحركية لهذا الإلكترون عند تغير طول موجة الفوتون بمقدار  $25\%$  بسبب تشتت كومبتون .؟

الحل

من المعطى ، تكون  $\Delta\lambda/\lambda = 0.25$  . كما تكون الطاقة الحركية للإلكترون المرشد كما يلي

$$T = \frac{ch}{\lambda} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \right) = E \frac{\eta}{1 + \eta} = (1.00 \text{ MeV}) \left( \frac{0.25}{1 + 0.25} \right) = 0.20 \text{ MeV.}$$

(11) تشتت فوتون طاقته  $250 \text{ keV}$  عند زاوية  $120^\circ$  بواسطة الكترون ساكن وحر. جد طاقة الفوتون المنتشت .؟

الحل

باستخدام معادلة (1.9.7) ، تكون طاقة الفوتون المنتشت كم يلي

$$E' = \frac{E}{1 + \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right) (1 - \cos\theta)}$$

بتعويض القيم المعطاة في هذه المعادلة ، اي

$$E = 0.250 \text{ MeV}, m_0 c^2 = 0.510 \text{ MeV} \text{ and } \cos 120^\circ = 0.50$$

نحصل على التالي:  $E' = 0.143 \text{ MeV}$

(12) تشتت فوتون زخمه الخطي  $p = 1.02 \text{ MeV}$  بواسطة الكترون ساكن وحر . اذا اصبح زخمه بعد التشتت يساوي  $p' = 0.255 \text{ MeV}$  ، جد زاوية التشتت .؟

الحل

نستخدم قانون ازاحة كومبتون :  $\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$  . باستخدام قانون دي برولي ، يمكن تحويل هذه العلاقة الى الصورة التالية :

$$\frac{h}{p'} - \frac{h}{p} = \lambda_c \left( 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

بترتيب هذه العلاقة ، نجد ان

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{h}{2\lambda_c} \left( \frac{p-p'}{pp'} \right) \\ &= \frac{1}{2} m_0 c \left( \frac{p-p'}{pp'} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 0.51 \frac{\text{MeV}}{c} \right) \left( \frac{0.765 \text{ MeV}/c}{1.02 \text{ MeV}/c \times 0.255 \text{ MeV}/c} \right) \\ &= 0.7502 \\ \sin \frac{\theta}{2} &= 0.86 = \sin 60 \\ \theta &= 120^\circ.\end{aligned}$$

(13) اذا تشتت فوتون بزاوية  $120^\circ$  بواسطة الكترون ساكن وحر، ونتيجة لذلك اكتب هذا الإلكترون طاقة حركية تساوي  $T = 0.45 \text{ MeV}$ . جد طاقة الفوتون الساقط.؟

**الحل**

تعطى طاقة الفوتون المتشتت كالتالي

$$E' = \frac{m_0 c^2 E}{m_0 c^2 + 2E \sin^2 \theta/2}$$

كما تكون طاقة الإلكترون الحركية بعد التشتت كالتالي

$$T = E - E' = E - \frac{m_0 c^2 E}{m_0 c^2 + 2E \sin^2 \theta/2}$$

$$T = \frac{2E^2 \sin^2 \theta/2}{m_0 c^2 + 2E \sin^2 \theta/2}$$

بحل هذه المعادلة التربيعية لأيجاد قيمة  $E$  ، ونجد ان

$$E = \frac{T}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{T \sin^2 \theta/2}} \right]$$

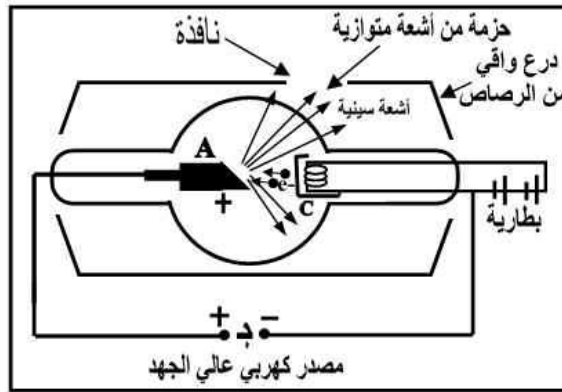
بالتعويض بالقيم المعطاة التالية :

$$T = 0.45 \text{ MeV}, m_0c^2 = 0.51 \text{ MeV}, \theta = 60^\circ,$$

$$E = 0.67 \text{ MeV} \text{ نجد ان}$$

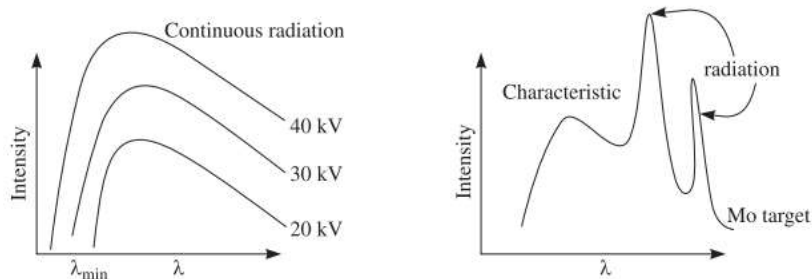
### (1.10) اشعاع التوقف (Bremsstrahlung) (Braking radiation)

يسمى الإشعاع الناتج عن تباطؤ الإلكترونات بإشعاع التوقف. عمليا ، تتولد الأشعة السينية *X-rays* بواسطة قذف اهدف صلبة بالإلكترونات سريعة . وانبوبة هذه الأشعة عبارة عن غرفة زجاجية مفرغة وبها عدة مجسات *electrodes* ، ويتم انتاج الإلكترونات بعملية الإنبعث الحراري من فتيل التنجستون ( شكل 1.10.1). وتتسارع هذه الإلكترونات تحت تأثير فرق جهد عالي لتسقط مباشرة على المصعد *anode* والذي يصنع من معادن ثقيلة ( مثل النحاس ، البلاتين..). ومعظم طاقة هذه الإلكترونات يتحول الى طاقة حرارية عند تصادمها مع المصعد و فقط يتحول 1-3% من طاقتها الى اشعة سينية . ولهذا السبب يجب ان يكون هناك ترتيبا ما لتبريد المصعد.



شكل(1.10.1) انبوبة الأشعة السينية.

اما توزيع شدة الأشعة السينية كدالة لطول الموجة ، بإستخدام هدف مصنوع من مادة الموليبدنيوم *molebdenum* ، يكون كما في الشكل (1.10.2)



شكل (1.10.2) توزيع الشدة كدالة لطول الموجة .

في الشكل (1.10.2) ، يمكن ملاحظة الظواهر الخاصة بالمنحنيات كما يلي

(1) لكل جهد تسارعي يوجد منتهى لطول موجة قصير  $\lambda_{min}$  والذي تحته لا يتولد اشعاعا . ومقدار هذا المنتهى يتوقف على قيمة الجهد المسرع *accelerating potential* ولا يعتمد على طبيعة مادة الهدف . في عام 1915 وجد العالمان دوين و هنت *Duane and Hunt* ان مقدار  $\lambda_{min}$  يتناسب عكسيا مع الجهد المسرع  $V$  . اي ،

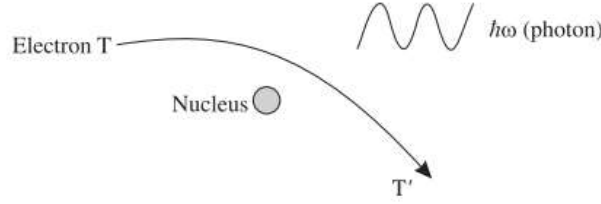
$$\lambda_{min} = \frac{12400}{V} \text{ \AA}$$

حيث تقاس  $\lambda_{min}$  بالإنجستروم  $A^0$  و  $V$  بالفولت .

(2) تتوزع طاقة الأشعة السينية بشكل متصل خلال قيم اطوال الأمواج الممتدة من  $\lambda_{min}$  حتى المالا نهائية . وهذا السبب يسمى اشعاع التوقف بالإشعاع المتصل او الأبيض *white radiation* . عند تفحص الشكل (1.10.2) ، منحنى الشدة - طول الموجة ، يلاحظ ان عند زيادة الجهد المسرع عن قيمة معينة ، وتكون مميزة لكل هدف ، يوجد عدة *peaks* . وتسمى اطوال الموجات المقابلة لهذه القمم بمميزات الإشعاع *characteristic radiation* .

لتوضيح ذلك ، تنتج الإشعة السينية بفعل التصادم بين الإلكترونات السريعة مع النويات الذرية . وعند تفاعل هذه الإلكترونات مع نواة الهدف ، بواسطة مجال كولوم ( الشكل 1.10.3) ، يتحول زخمها الى النواة مما يسبب في انبعاث فوتون في هذه العملية . لنفرض ان  $T'$  هي الطاقة الحركية للإلكترون الخارج ، تكون طاقة الفوتون المنبعث كما يلي

$$\hbar\omega = T - T'$$



شكل (1.10.3) خصائص الأشعة السينية .

حيث  $T$  تساوي طاقة الإلكترون الساقط على الهدف . وبفعل التصادمات العديدة فإن الإلكترون الساقط يفقد كميات مختلفة من طاقته الى ان يصل الى حالة السكون . ولذلك ، يشكل الإشعاع المنبعث طيفا متصلا . وينتج فوتون الأشعة السينية الأقصر طول موجة عندما يخسر الإلكترون الساقط كل طاقته الحركية في تصادم واحد فقط ،  $(T' = 0)$  . وهكذا

$$h\omega_{\max} = T = eV$$

$$\frac{2\pi hc}{\lambda_{\min}} = eV$$

حيث

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi hc/e}{V} = \frac{12400}{V} \text{ \AA}$$

أحيانا ، تسمى عملية إشعاع التوقف بالظاهرة العكسية للظاهرة الكهروضوئية . حيث في الظاهرة الكهروضوئية يتم امتصاص فوتون وتنتقل طاقته وزخمه الى الإلكترون ، بينما في عملية إشعاع التوقف يتم توليد فوتون بطاقة وزخم نابغة من تصادم الإلكترون بالنواة .

### (1.11) ظاهرة رامان *Raman Effect*

في عام 1927 كان العالمان رامان وكريشنان بيحثنان في عملية تشتت الضوء بواسطة مواد شفافة من السوائل ، الغازات ، والجوامد . فوجدا انه اضافة الى تردد الضوء الساقط ، فإن الإشعاع المنتشت يحتوي على عدد من الترددات الأخرى التي تكون اعلى واقل منى تردد هذا الضوء الساقط . وعرفت هذه الظاهرة بظاهرة رامان . بينما تسمى الترددات المنخفضة في الضوء المنتشت ترددات ستوكس *stokes' frequencies* ( الأطباق الحمراء) و سميت تلك الترددات الأعلى بترددات ستوكس المضادة *anti- Stokes' frequencies* ( الأطباق البنفسجية ) . ولا تعتمد هذه الترددات على تردد الضوء الساقط وتكون مميزة وفقا للمادة المشتتة . كما وجد ان شدة الأطباق الحمراء تكون اكبر من شدة الأطباق البنفسجية . كما تزداد شدة الأطباق البنفسجية سريعا مع ارتفاع درجة حرارة المادة المشتتة.

وقد ساهمت نظرية الإشعاع الكمية وفيزياء الكم للذرات والجزيئات في تبسيط فهم ظاهرة رامان. حيث اعتبرت هذه الظاهرة كعملية تصادم غير مرن للفوتون الساقط مع جزيئات المادة المشتتة ، لنفرض ان تردد هذا الفوتون  $\omega_0$  وطاقته الأولية ( قبل التصادم )  $E_i$  . وخلال هذه العملية اما ان يعطي هذا الفوتون طاقته للجزيء او يستلم طاقة من هذا الجزيء وبالتالي تنتقل هذا الجزيء الى حالة طاقة  $E_f$  . ونتيجة لعملية التصادم ، لنفرض ان تردد هذا الفوتون هو  $\omega$  . وعليه ، فإن قانون حفظ الطاقة يتطلب ما يلي

$$\begin{aligned} \hbar\omega_0 + E_i &= \hbar\omega + E_f \\ \omega &= \omega_0 + \left( \frac{E_i - E_f}{\hbar} \right) \\ \omega &= \omega_0 + \Delta\omega \end{aligned} \quad \dots(1.11.1)$$

حيث

$$\Delta\omega = (E_i - E_f)/\hbar \quad \dots(1.11.2)$$

تعطي معادلة (1.11.2) حالتين هما :

1. اذا كانت  $E_i < E_f$  ، تكون  $\Delta\omega$  سالبة ويعطى تردد الفوتون المتشتت بالعلاقة التالية :

$$\omega = \omega_0 - |\Delta\omega| \quad (\text{Stokes' lines}) \quad \dots(1.11.3)$$

ويحدث هذا عندما تكون الجزيئات بداية في الحالة الأرضية ويحول الفوتون طاقته هذه الجزيئات .وعليه تتضائل طاقة هذا الفوتون ( وكذلك تردده) ويقفز الجزيء الى الحالة *excited state* . وهذا يفسر اصل خطوط ستوك *Stokes' lines* . حيث انه يوجد عدد كبير من الحالات المثارة، يكون انتقال الجزيئات من الحالة الأرضية الى الحالات المثارة مصحوبا بعدد من الخطوط الطيفية.

عند درجة الحرارة العادية ، يزيد عدد الجزيئات في الحالة الأرضية عن عددها في الحالات المثارة . وعليه ، يكون احتمال انتقال الجزيئات الى اعلى اكبر من احتمال انتقالها الى اسفل. ولذلك تكون شدة الأطباق الحمراء اكبر من تلك الأطباق البنفسجية .

2. اذا كانت  $E_i > E_f$  ، تكون  $\Delta\omega$  موجبة ويعطى تردد الفوتون المتشتت بالعلاقة التالية :

$$\omega = \omega_0 + |\Delta\omega| \quad (\text{Antistokes' line}) \quad \dots(1.11.4)$$



وهذا يحدث عندما يكون الجزيء بداية في إحدى الحالات المثارة . وعليه ، يسبب الفوتون الساقط في انتقال هذا الجزيء الى الحالة الأرضية . وخلال هذه العملية يتلقى الفوتون طاقة من الجزيء ولهذا يصبح للفوتون المنتشتت طاقة ( تردد) اعلى . وهذا يسبب ظهور الأطباق البنفسجية .

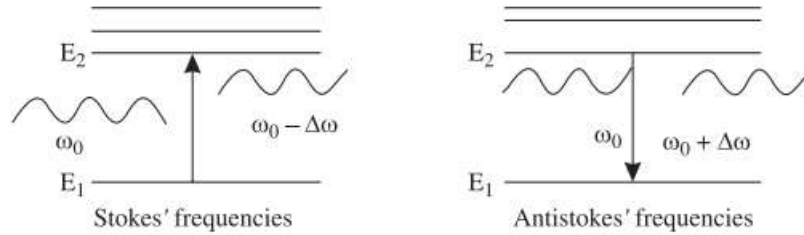
عند درجة الحرارة العادية ، يكون عدد الجزيئات في الحالات المثارة اقل من عددها في الحالة الأرضية ولهذا يكون عدد القفزات الى اسفل من الحالات المثارة الى الحالة الأرضية اقل . وعليه ، تكون الأطباق البنفسجية اضعف شدة . وعند تسخين المادة المشتتة ، يزداد عدد الجزيئات في الحالات المثارة وكذلك عدد القفزات الى الأسفل . هكذا يسبب ازدياد درجة حرارة المادة المشتتة في زيادة شدة الأطباق البنفسجية المرافقة .

بدلالة الأعداد الموجية *wave numbers*  $\left(\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi c}\right)$  ، يمكن التعبير عن ازاحة رامان كما يلي

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_0 \pm \Delta\bar{\nu} \quad \dots(1.11.5)$$

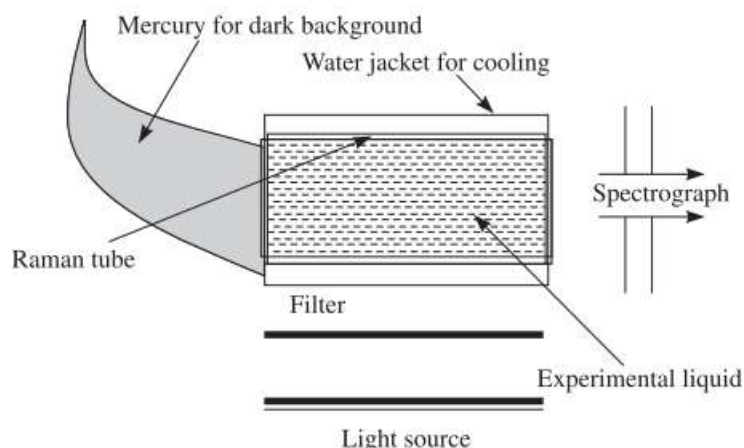
حيث الإشارة الموجبة ( السالبة) تستخدم في حالة خطوط ستوكس المضادة ( خطوط ستوكس) .

يوضح الشكل (1.11.1) منشأ خطوط رامان .



الشكل (1.11.1) مخطط اصل خطوط رامان .

لدراسة ظاهرة رامان عمليا ، يستخدم الترتيب التجريبي كما في الشكل (1.11.2) .



شكل (1.11.2) مخطط جهاز رaman .

يتم وضع المادة المشتتة ( في حالة السيولة ) في انبوبة ، حيث يكون احد اطرافها مسطحا و يكون الطرف الآخر ممتدا بشكل قرن *horn shape* مملوء بمادة الزئبق ليعطي خلفية سوداء . كما يثبت مطياف عند الوجه المسطح من الأنبوبة . وتحاط كل الأنبوبة بحمام مائي *water jacket* للتبريد ولحفظ درجة حرارة السائل بشكل ثابت . يستخدم ضوء احادي اللون مع مرشحات *filters* مناسبة لتتنوير سائل التجربة . وبعد حدوث عملية التشتت ، يوجه الضوء المشتت نحو المطياف *spectrograph* عبر فتحات ضيقة . يتم تسجيل خطوط رaman بواسطة صفائح حساسة ضوئيا .

بما ان ظاهرة رaman تكون مميزة لجزيئات المادة المشتتة ، لذلك تستخدم في دراسة تركيب جزيئات المواد . كما ان هذه الظاهرة اعطت برهانا للطبيعة الكمية للإشعاع ، وبذلك استحق رaman جائزة نوبل في الفيزياء في عام 1930.

### تمارين محلولة

(14) للخط المثار  $2536 \text{ \AA}^0$  ، وجد ان خط رaman لعينة ما عند  $2612 \text{ \AA}^0$  . جد ازاحة رaman بوحدة  $m^{-1}$  ؟.

الحل

$$\bar{\nu}_0 = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{2536 \times 10^{-10} \text{ m}} = 3943000 \text{ m}^{-1}$$

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2612 \times 10^{-10} \text{ m}} = 3828000 \text{ m}^{-1}$$

ازاحة رaman :

$$\Delta\bar{\nu} = \bar{\nu}_0 - \bar{\nu} = 115000 \text{ m}^{-1}.$$

(15) اذا اعطيت اثاره عينة ما بإشعاع طول موجته  $5000 \text{ \AA}$  خط رامان عند  $5050.5 \text{ \AA}$ . احسب تردد رامان بوحدة  $\text{m}^{-1}$  والموقع المقابل لخط ستوكس المضاد بوحدة  $\text{A}^0$  .؟

**الحل**

من المعطى في المسألة ، نجد ان

$$\bar{\nu}_0 = 2 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \text{ and } \bar{\nu} = 1.98 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

ازاحة رامان :

$$\Delta\bar{\nu} = 0.02 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

تردد خط ستوكس المضاد :

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_0 + \Delta\bar{\nu} = 2.02 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$$

طول موجة خط ستوكس المضاد :

$$\lambda = \frac{1}{\bar{\nu}} = 4950.05 \text{ \AA}.$$

## (1.12) ازدواجية طبيعة الإشعاع *The Dual Nature of Radiation*

شكل اكتشاف الظاهرة الكهروضوئية وظاهرة كومبتون معضلات خطيرة قبل الفيزياء المعاصرة . حيث يمكن مفهوم ظواهر تداخل وحيود الضوء على اسس النموذج الموجي للإشعاع ، بينما يمكن فهم ظاهرة الكهروضوئية وظاهرة كومبتون على اسس الطبيعة الجسيمية للإشعاع ، وتعطى طاقة الفوتون بالمقدار  $\hbar\omega$ . وكان من الصعب تعيين اهمية ذات معنى للتردد  $\omega$  المصاحب للجسيم المادي . ومن اجل تحديد طاقة الفوتون يتوجب تحديد سرعة الضوء وطول الموجة ، حيث  $\hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$  ، اي ان تحديد طول الموجة يركز على اساس الطبيعة الموجية للضوء. وهذا الوضع التناقضي قوبل بقوة في تجربة كومبتون اذ ان طول موجة الأشعة السينية يتعين بالمطياف البلوري *crystal spectrometer* ، كما ان تفسير وتحليل القياسات في هذه التجربة يركز في الأساس على النموذج الموجي وان تشتت الأشعة السينية يمكن فهمه بدلالة النموذج الجسيمي.

وبعبارة اخرى ، لا تنتزل السمات الجسيمية والموجية للإشعاع بشكل آني في نفس التجربة ، فمثلا في التجارب المتعلقة بانتشار الضوء ( التداخل والحيود) تظهر الطبيعة الموجية للضوء ، في حين تظهر الطبيعة الجسيمية للإشعاع في حالة تفاعل هذا الشعاع مع المادة. وهذا ادى الى افتراض العالم نيل بور في عام 1928 ان الصفات الموجية والجسيمية للإشعاع تكون متكاملة *complementary* ولا يمكن تطبيق هاتين الصفتين معا و في نفس الوقت . اي انه عند ملاحظة السلوك الموجي بسهولة ، فإن من الصعب ملاحظة السلوك الموجي والعكس صحيحا . وعرفت هذه الفكرة بمبدأ بور المتكامل *Bohr complementary principle* .

كما ترتبط الخواص الجسيمية والموجية للإشعاع بواسطة ثابت بلانك الذي هو عبارة عن حاصل ضرب متغيرين : احدهما مميز للموجة والثاني مميز للجسيم . رياضيا ،

$$\hbar = \frac{E}{\omega} = \frac{ET}{2\pi}$$

حيث E طاقة الفوتون ،  $\omega$  تردد هذا الفوتون ، T زمن دورة الموجة . هنا E تمثل خصائص الجسيم ، T تمثل خصائص الموجة . من هذا يمكن القول انه اذا كانت قيمة احدى الخاصيات كبيرة ، فإن قيمة الخاصية الأخرى تكون صغيرة والعكس صحيح . وبعبارة ادق ، اذا كانت الخاصية الجسيمية للإشعاع هي السائدة ، فإن الخاصية الموجية تصبح متنحية ( او من الصعب ملاحظتها ) . فمثلا ، في حالة اشعة جاما والأشعة السينية القصيرة تكون طاقة الفوتون عالية وبالتالي تظهر الخاصية الموجية بشمل مسيطر.

## تمارين الفصل الأول

(1) برهن ان معدل طاقة متذبذب بلانك يعطى كالتالي

$$\bar{\epsilon} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

(2) استنتج قانون بلانك لتوزيع الطاقة الطيفي لإشعاع الجسم الأسود، ثم استخدم هذا القانون للحصول على

(i) قانون ازاحة فين (ii) قانون ستيفان .

(3) اشتق قانون بلانك الإشعاعي ، ثم برهن ان هذا القانون يؤول الى قانون فين وقانون ريلي- جينز في حدود ملائمة ؟.

(4) يتعرض فوتون الأشعة السينية الى تشتت كومبتون في اتجاه يصنع زاوية  $\theta$  مع اتجاه السقوط الابتدائي. برهن ان طاقة الفوتون المتشتت تكون كما يلي

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{m_0c^2} \sin^2 \theta/2}$$

ثم استخدم هذه العلاقة لإيجاد القيمة الصغرى لهذه الطاقة .

(5) برهن ان طاقة الكترون كومبتون الحركية تعطى كما يلي

$$T = \frac{\left(\frac{2E^2}{m_0c^2}\right) \sin^2 \theta/2}{1 + \left(\frac{2E^2}{m_0c^2}\right) \sin^2 \theta/2}$$

، ثم استخدم هذه العلاقة لأيجاد الطاقة الحركية العظمى لهذا الإلكترون .

(6) اثبت ان اتجاه الكترون كومبتون المرتد يعطى كما يلي

$$\tan \phi = \frac{E' \sin \theta}{E - E' \cos \theta}$$

(7) اذا كانت الطاقة اللازمة لتحرير الكترول من ذرة الصوديوم تساوي  $2.3 eV$  ، بين فيما اذا يحقق الصوديوم الظاهرة الكهروضوئية لضوء طول موجته 6500 انجستروم .؟

(8) اذا كان جهد الإيقاف للإلكترونات الضوئية المنبعثة من سطح يضاء بشعاع طول موجته 5000 أنجستروم هو  $0.7 volt$  . فإذا تغير طول موجة الشعاع ليصبح مقدار جهد الإيقاف  $1.5 volt$  ، جد طول موجة الشعاع الجديدة .؟

(9) في تجربة الخلية الكهروضوئية ، لوحظ ان للضوء الذي طول موجته 3000 انجستروم ، يكون جهد الإيقاف  $1.85 volt$  ، وان للضوء الذي طول موجته 4000 انجستروم ، يكون جهد الإيقاف  $1.5 volt$  . استخدم هذه البيانات لإيجاد ما يلي : (i) ثابت بلانك (ii) دالة الشغل للمادة المستخدمة في التجربة (iii) طول موجة البدء لهذه المادة .

(10) جد تردد ، طول موجة ، وزخم الفوتون الذي طاقته تساوي طاقة سكون الإلكترون .؟

(11) وجد ان طول موجة شعاع X- تتضاعف عند تشتته بزاوية  $90^0$  . جد طول موجة هذا الشعاع .؟

(12) اذا كانت ازاحة كومبتون تساوي 0.0121 انجستروم . جد زاوية التشتت .؟

(13) اذا كانت طاقة الفوتون المنتشت في تجربة كومبتون تساوي  $300keV$  ، وطاقة حركة الإلكترون المرتد هي  $250 keV$  . جد طول موجة الفوتون المنتشت .؟

(14) في تجربة كومبتون ، اذا كان طول موجة شعاع X- يساوي  $0.15A^0$  وزاوية التشتت تساوي  $37^0$  . جد ما يلي

(i) طاقة كا من الفوتون الساقط والمنتشت ، وطاقة الإلكترون المنبعث . (ii) زخم الفوتون الساقط والمنتشت .؟

## الفصل الثاني الطبيعة الموجية للجسيمات المادية

### *Wave Nature of Material Particles*

#### (2.1) مقدمة *Introduction*

ادى النجاح الباهر لنظرية بور في إعطاء تفسيراً لطيف الهيدروجين الى حث تخيلات الفيزيائيين على التفكير بتوسيع افكار هذه النظرية ، مع الأخذ بعين الإعتبار بعض التعديلات عليها ، لتشمل التفصيل الدقيق لأطياف الذرات ذات الإلكترونات المتعددة. وعلى سبيل المثال ، حاول *سمرفيلد* في نظريته اعطاء تفسير الوجود التركيب الدقيق *fine structure* لطيف الهيدروجين ، ولكن لم تنجح هذه النظرية في تفسير اطياف الذرات عديدة الإلكترونات . ومع استعمال الأدوات ذات القدرة التحليلية العالية ، رصدت عدة مظاهر محيرة للإطياف الذرية . كما شكل سلوك الذرات في المجالات الكهربائية والمغناطيسية تحدياً خطيراً في مجال الفيزياء النظرية . في بداية تطور الفيزياء الذرية كانت الطرق العادية لتفسير المظاهر المعقدة للإطياف الذرية عبارة عن عرض قواعد وقوانين بها نوع ما من الأرقام الكمية بدون اي اساس نظرية ، مثل افتراض الإلكترون المغزلي *spinning electron* والذي اقترح بواسطة الفيزيائيين *الينبيك وجودسمث* (1925) . خلال هذه الفترة الزمنية تم التوصل الى قناعات مفادها ان مبادئ الفيزياء الكلاسيكية لا تكون ملائمة لفهم الظواهر الذرية ، وان هناك حاجة لإحداث تغييرات جوهرية في المفاهيم الخاصة بالأنظمة المجهرية *microscopic systems* . في عام 1924 ، اقترض الطالب الجامعي الفرنسي، *لويس دي برولي* في اطروحته لنيل درجة الدكتوراة في الفيزياء ، هذا التغيير الثوري المطلوب ( كما سيرد تفصيله في البند اللاحق) .

#### (2.2) فرضية دي برولي *De Broglie Hypothesis*

تصور دي برولي ان الكون الفيزيائي ككل هو عبارة عن مادة واشعاع . في نظرية الإشعاع الكمية يمكن تعيين جزء او طاقة مكممة  $\varepsilon$  تردداً ،  $\omega (= 2\pi\nu)$  بحيث ان  $\varepsilon = \hbar\omega$  . بالرغم انه لا يوجد هناك احساس فيزيائي للتردد  $\omega$  ، مع ذلك تعمل هذه النظرية المعتمدة على هذا الفرض بشكل حسن . من هذا الترميز تكهن دي برولي

ان من الممكن في حالة الجسيمات المادية ، التي لها جزء من الطاقة ايضا ( على سبيل المثال ،  $\varepsilon = mc^2$  ، تعيين تردد مميز . اي جسيم مادي كتلة سكونه  $m_0$  يكافئ طاقة مقدارها  $m_0c^2$  ، ولذلك ، وفقا لفكرة دي برولي نستطيع التعبير عن هذه الطاقة كما يلي

$$m_0c^2 = \hbar\omega \quad \dots(2.2.1)$$

حيث  $\omega$  تمثل تردد احدى العمليات الدورية الذاتية المرافقة للجسيم المادي . لنرى كيف ان هذه العملية الدورية تبدو لمراقب ما متحركاً بالنسبة لها . لنفرض ان اطارا ما  $S'$  الذي يتحرك مع هذا الجسيم . يكون تردد العملية الداخلية المرافق للجسيم كما يلي

$$\omega = m_0c^2/\hbar$$

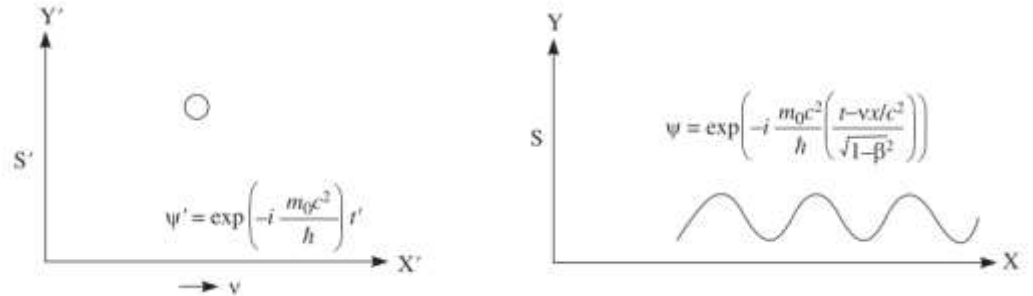
كما يمكن تمثيل الحركة الإهتزازية المصاحبة لهذه العملية الدورية الداخلية كالتالي

$$\psi'(x',t') = \exp(-i\omega t') = \exp\left(-i\frac{m_0c^2}{\hbar}t'\right) \quad \dots(2.2.2)$$

لنفرض ان  $S$  يمثل اطار المراقب والذي يتحرك الجسيم بالنسبة له في اتجاه محور  $x$  بسرعة  $v$  . باستخدام تحويل لورنس للزمن ، تكون معادلة العملية الدورية المرافقة لتحويل الجسيم عند الإنتقال من الإطار  $S'$  الى الإطار  $S$  كما يلي

$$\psi(x,t) = \exp\left(-i\frac{m_0c^2}{\hbar}\left(\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right), \quad \beta = v/c \quad \dots(2.2.3)$$

يوضح الشكل (2.2.1) التمثيل البياني لمعادلات الحركة الجسيم في هذين الإطارين .



شكل (2.2.1) مخطط معادلات حركة الجسيم في الإطارين  $S, S'$  .



رياضيا ، تمثل المعادلتين (2.2.2) ، (2.2.3) تقدم موجة بثابت انتشار  $k$  والمعطى كما يلي

$$\begin{aligned} k &= \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{p}{\hbar} \end{aligned} \quad \dots(2.2.4)$$

او

$$p = \hbar k \quad \dots(2.2.5)$$

او

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \quad \dots(2.2.6)$$

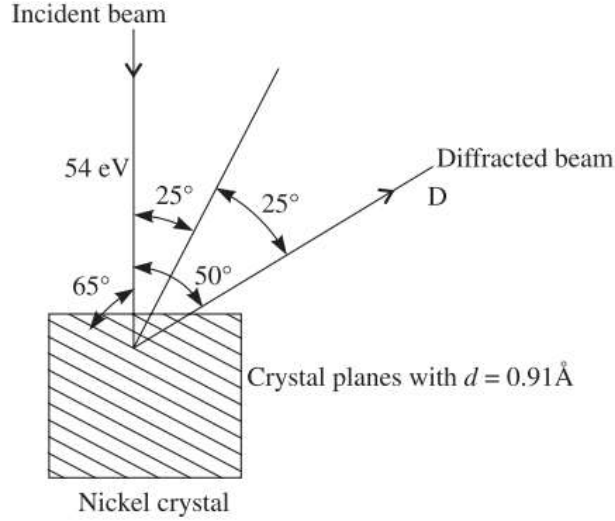
حيث  $T$  طاقة الجسيم الحركية .

تحدد المعادلات (2.2.4 – 2.2.6) طول موجة دي برولي الممثلة للجسيم .

### **Experimental Verification of de Broglie Hypothesis**

### **(2.3) البرهان العملي لفرضية بور**

بالرغم من ان **دي برولي** تكهن بالطبيعة الموجية للجسيمات ، الا انه لم يفكر احد من الفيزيائيين في طريقة ما لإثبات وجود هذه الأمواج عمليا . في عام 1925 ، اشار العالم الفيزيائي **إليسير Elasser** الى انه من الممكن تمثيل وجود هذه الأمواج عن طريق حيودها بمحزوز الحيود . بعد ذلك ، اجرى العالمان الأمريكان ، **دافيسون و جيرمر** ، اول تجربة ، التي بينت بالتحديد وجود امواج دي برولي واثبتت صحة العلاقة بين طول الموجة المصاحبة وزخم الجسيم . ويوضح الشكل (2.3.1) مخطط هذه التجربة.

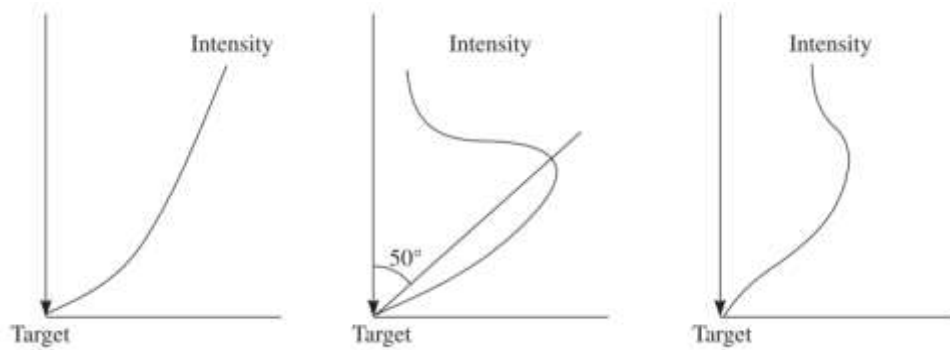


شكل (2.3.1) مخطط تجربة دافيسون وجيرمر .

في هذه التجربة ، يتم تسارع حزمة من الإلكترونات خلال منطقة ذات فرق جهد ، ومن ثم تسقط هذه الحزمة على هدف مكون من مادة النيكل و يستقبل الكاشف  $D$  الإلكترونات المتشتتة . وبما ان سطح النيكل يكون خشنا لذلك تنشئت هذه الإلكترونات في جميع الإتجاهات. ويجب ان تكون كل ادوات هذه التجربة موضوعة في غرفة مفرغة من الهواء . وللتأكد من عدم تسرب جزيئات الهواء الى داخل هذه الغرفة ، مما يسبب اكسدة سطح مادة النيكل ، ينزع الهدف من مكانه ويسخن في فرن لدرجة حرارية عالية للتخلص من اي تأكسد محتمل ، ثم يتم اعادة التجربة عدة مرات لمزيد من الدقة .

اظهرت هذه التجربة النتائج التالية: تكون شدة الإلكترونات المتشتتة عظمى وصغرى عند زوايا معينة وتعتمد المواقع الزاوية للقيم العظمى والصغرى على طاقة الإلكترونات الساقطة ( الأولية) .

يوضح الشكل (2.3.2) التغير الزاوي لشدة الإلكترونات المتشتتة كدالة للجهد التسارعي .



شكل (2.3.2) تغير شدة شعاع الإلكترونات الحائدة مع طاقة الإلكترون .

نلاحظ من الشكل (2.3.2) ان الشدة عند اي زاوية تتناسب مع بعد المنحنى عند هذه الزاوية عن نقطة التشتت . ويمكن تفسير نتائج هذه التجربة كما يلي:

بداية ، تكون مادة النيكل ( الهدف) متعددة البلورات *polycrystalline* وبعد التسخين تصبح هذه المادة بلورة منفردة ، وذلك بسبب ترتيب الذرات في شبكة منتظمة *regular lattice* . وفقا لفرضية دي برولي ، تتعرض موجات الإلكترونات بواسطة المستويات الذرية بنفس طريقة حيود اشعة *X*- عند المستويات البلورية .

في احد الترتيبات الخاصة ، لنفرض ان شعاع من الإلكترونات ذي طاقة  $54 \text{ eV}$  يسقط على هدف منفرد من النيكل . ونتيجة لذلك، يلاحظ ان الشعاع الحائد يملك شدة عظمى في اتجاه يصنع زاوية قدرها  $50^\circ$  مع اتجاه الشعاع الساقط ( الشكل 2.3.1) . من الواضح في هذه الحالة ان زاوية السقوط بالنسبة لمستويات البلورة تساوي  $65^\circ$  . وباستخدام قياسات اشعة *X*- ، وجدت المسافة بين هذه المستويات البلورية مساوية للمقدار  $d = 0.91A^0$  . وتكون معادلة براغ للحصول على النهايات العظمى في نموذج الحيود كما يلي :

$$2d \sin \theta = m\lambda; \quad m = 1, 2, \dots$$

تعطي هذه المعادلة ، عندما  $m=1$  ، طول الموجات الإلكترونية وتكون كالتالي

$$\lambda = 2d \sin \theta = 2 \times (0.91 \text{ \AA}) \sin 65 = 1.65 \text{ \AA}$$

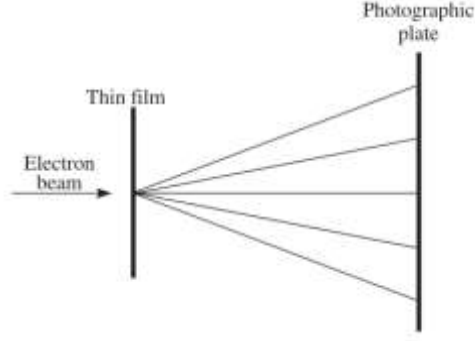
ومن ناحية اخرى ، تكون طول الموجة المصاحبة لشعاع الإلكترون باستخدام فرضية دي برولي كما يلي

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 \text{ meV}}} = \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 54 \text{ V}}}$$

$$= 1.66 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.66 \text{ \AA}$$

من هنا نجد ان التوافق الممتاز بين القيم التي تم الحصول عليها من تجربة الحيود وفرضية دي برولي يعطى برهانا عمليا لصلاحية الطبيعة الموجية للجسيم ( الإلكترون) .

كما كان هناك برهان عملي آخر جاء على يد العالم طومسون *G.P. Thomson* حيث قام بإجراء تجربة عملية في عام 1927 . في هذه التجربة جعل شعاع ضيق من الإلكترونات يمر خلال غشاء رقيق من مادة كثيرة البلورات . ويتم استقبال الشعاع النافذ بواسطة فيلم حساس ضوئيا ( الشكل 2.3.3).



شكل (2.3.3) مخطط تجربة طومسون للحصول على نمط حيود للإلكترون.

لاحظ طومسون ان نمط الحيود الذي حصل عليه باستخدام حزمة الكترونات يكون مماثلا لنمط حيود الأشعة السينية  $X$ - rays . وبذلك اكد طومسون صحة فرضية بور .

وخلاصة القول ان ليس فقط الإلكترونات هي التي تظهر الخواص الموجية ، ولكن كل الجسيمات المادية تظهر هذه الخاصية تحت شروط مناسبة . في الحقيقة تستخدم تقنية حيود النيوترونات بشكل واسع لتحديد تركيب البلورات .

### Wave Behavior of Macroscopic Particle

### (2.4) السلوك الموجي للجسيمات العيانية

من المعلوم ان ظواهر الحيود تحدث اذا كانت ابعاد الأجسام المسببة للحيود (فتحات الحيود) من رتبة اطوال الموجات الساقطة عليها . فمثلا ، اذا سقطت موجة ضوئية على فتحة  $aperture$  ، تصبح ملاحظة ظواهر الحيود بشكل اوضح كلما ضاق اتساع هذه الفتحة . عموما في حالة الطيف الكهرومغناطيسي نج انه كلما اتجهنا من منطقة الأمواج الطويلة (الموجات الراديوية) نحو منطقة الموجات القصيرة (اشعة جاما) ، فإن مظاهر الطبيعة الموجية تتضائل تدريجيا وتصبح الطبيعة الجسيمية اكثر فأكثر وضوحا . اي ، تصبح الخاصية الجسيمية لأشعة جاما هي الصفة السائدة ويكون من الصعب جدا ملاحظة السلوك الموجي لهذه الأشعة . علاوة على ذلك ، يكون من الصعب توفر اداة حيود ذات ابعاد مقاربة لطول موجة هذه الأشعة.

ويمكن القول ان طول موجة دي برولي للأجسام العيانية المتحركة بسرعة عادية تكون صغيرة الى درجة ما تجعل الصفة الجسيمية تسيطر على الصفة الموجية بحيث لا يمكن ملاحظتها. لتوضيح ذلك ، نفرض ان جسما كتلته  $100g$  ويتحرك بسرعة  $1000 m/s$  ، تكون طول الموجة المصاحبة لحركة هذا الجسم (موجة دي برولي) تساوي  $\lambda = h/mv = 6.6 \times 10^{-36} m$  . من ناحية اخرى تكون طول موجة الجسيمات المجهرية كالألكترون ، البروتون ، و النيوترون من رتبة المسافات بين الذرات او الجزيئات في المواد الصلبة ولذلك تتصرف هذه المواد كمحزوز حيود طبيعي .

## (2.5) وجهات نظر تاريخية *Historical Perspective*

من الجدير بالذكر ان الطبيعة الجسيمية للإشعاع اكتشفت في عام 1905 ، وان تصور الطبيعة الموجية للجسيم تم افتراضه في عام 1924 . وعليه ، يمكن التسائل لماذا لم يتوقع الفيزيائيون هذه الفكرة الأخيرة في نفس العام (1905)؟ . من الملاحظ ان اينشتين اقترح فكرته الثورية لطبيعة الإشعاع الكمية لتفسير بعض الظواهر الملاحظة عمليا والتي لا يمكن تفسيرها بدون هذه الفكرة . من ناحية اخرى ، لا بد من الإشارة الى شجاعة دي برولي في بلورة فرضيته التي وضعها بدون وجود اي ملاحظة تجريبية. غير ان المناخ الثقافي في زمن دي برولي كان اكثر قبولا للأفكار الجديدة مقارنة مع الزمن الذي نشر فيه اينشتين بحثه عن الظاهرة الكهروضوئية . مهما يكن ، فقد لاقت فرضية دي برولي احتراماً لدى عقول الأقلية المؤثرة . ومما سهل قبول هذه الفرضية لدى الأوساط العلمية دفاع اينشتين القوي عنها ، حيث علق على اطروحة دي برولي للدكتوراة بقوله " لقد رفع دي برولي زاوية في في الحجاب العظيم *de Broglie lifted a corner in the great veil* ". كما حرص نشر هذه الفرضية علماء الفيزياء النظرية على إجراء الكثير من النقاشات العلمية . في زيورخ ، اقترح العالم الكيميائي *ديباي Debye* على العالم الألماني *شروندجر* ان يقوم بدراسة معمقة لفرضية دي برولي ، وجاء البرهان العملي لفرضية دي برولي بعد سنة من تقديم شروندجر نظامه الجديد في الميكانيكا ( الميكانيكا الموجية *wave Mechanics* ) . كما استمر العمل على تشتت ظاهرة تشتت الإلكترون لبيع سنين (1919-1927) ، ولغاية 1926 لم يكن لدى *جيرمير ودافيسون* اي علم بفرضية دي برولي. وعندما حضر دافيسون الى جامعة اوكسفورد سمع بهذه النظرية الجديدة وتحقق من ان نتائج قذف الإلكترونات في تجربته هي نفس نتائج حيود الأشعة السينية . وهكذا حصلت فرضية دي برولي على برهانها التجريبي صدفة . في عام 1927 اكتشف *طومسون G.P. Thomson* ان الإلكترون ( جسيم سالب الشحنة ) هو موجة *wave* ، واستحق بذلك جائزة نوبل .

## (2.6) رزمة الموجة *The Wave Packet*

مما تقدم في الفصول السابقة نستنتج انه كلما استمر تناقص طول موجة الإشعاع الكهرومغناطيسي ، تصبح الطبيعة الجسيمية سائدة اكثر فأكثر . من ناحية اخرى ، كلما صغرت كتلة الجسم ، تظهر طبيعته الموجية. لذلك ، يبدو واضحا ان الطبيعة الموجية والطبيعة الجسيمية هما مفهومان لنفس الحقيقة الفيزيائية . مع انه يظهر ان هذين المفهومين مختلفان الى درجة لا يمكن التوفيق بينهما . يكون الفرق الواضح بين الجسيم والموجة هو **تموضع localized** الجسيم بينما تكون الموجة ممتدة في الزمان والمكان . ويمكن التوفيق بين المفهومين بطريقة وحيدة وهي جعل الموجة متموضعة ، وتتميز هذه الخاصية في فكرة **رزمة الموجة wave packet** .

في ميكانيكا الكم ، تكمن اهمية رزمة الموجة لأنها تعطي وسيلة للتوافق بين مفاهيم الموجة والجسيم في سلوك المادة والإشعاع . في الحقيقة ، رزمة الموجة هي موجة ممتدة في منطقة محددة . وتتكون من تركيب عدد كبير من الموجات المختلفة في سعاتها *amplitudes* واعدادها الموجية *wave numbers* .

لنعتبر تركيب موجتين لكل منها الدوال التالية :

$$\psi_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$\psi_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

حيث تكون سرعة طور كلا من الموجتين كما يلي:  $v_1 = \omega_1/k_1$  ,  $v_2 = \omega_2/k_2$  . وعليه ، تكون دالة الموجة المحصلة كالتالي

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 \\ &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2A \cos \left\{ \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t - \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) x \right\} \cos \left\{ \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t - \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) x \right\} \\ &= 2A \cos \left\{ \left( \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left( \frac{\Delta k}{2} \right) x \right\} \cos \{ (\bar{\omega}t - \bar{k}x) \} \quad \dots(2.6.1) \end{aligned}$$

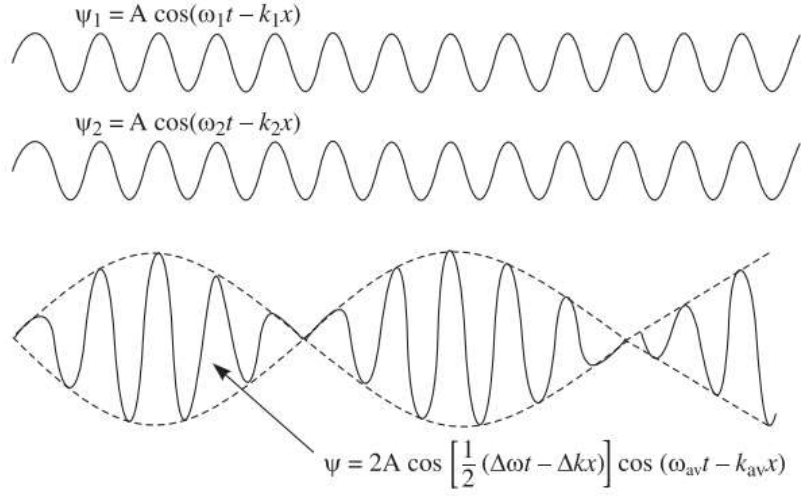
حيث

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \Delta k = k_1 - k_2, \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

يمثل الحد الأول في معادلة (2.6.1) موجة معدلة السعة *amplitude modulated wave* والتي تنتشر بسرعة

$$v_g = \Delta\omega / \Delta k$$

يمكن تمثيل المعادلة (2.6.1) بالشكل البياني (شكل 2.6.1) .



شكل (2.6.1) مخطط تركيب موجتين .

يمثل المنحنى النقطي في الشكل (2.6.1) الموجة المعدلة . من الواضح ان الموجة المحصلة تكون مقسمة الى مجموعات . وتكون  $v_g$  تساوي السرعة التي تتحرك بها المجموعة وتسمى بسرعة المجموعة *group velocity* . في حالة تركيب عدد كبير من الموجات المختلفة في التردد وثابت الانتشار *propagation constants* بكميات متناهية في الصغر *infinitesimally* ، تتحرك الموجة المحصلة والمعدلة بسرعة مجموعة هي

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \quad \dots(2.6.2)$$

حيث تقيم المشتقة عند القيمة المركزية لثابت الانتشار  $k_0$  .

من الحظ انه اذا تحركت مكونات الموجات بسرعة متساوية فإن المجموعات تتحرك بنفس هذه السرعة ايضا . اما اذا تحركت هذه المكونات بسرعات مختلفة ، تكون سرعة المجموعة مختلفة عن سرعة المكونات .

حتى تظهر مجموعة الأمواج كجسيم ، يلزم تكوين مجموعة واحدة فقط . وللحصول على مجموعة منفردة ، يتطلب تركيب عدد غير محدود من الأمواج التي تختلف عن بعضها البعض في الترددات وثوابت الانتشار بمقادير متناهية الصغر .

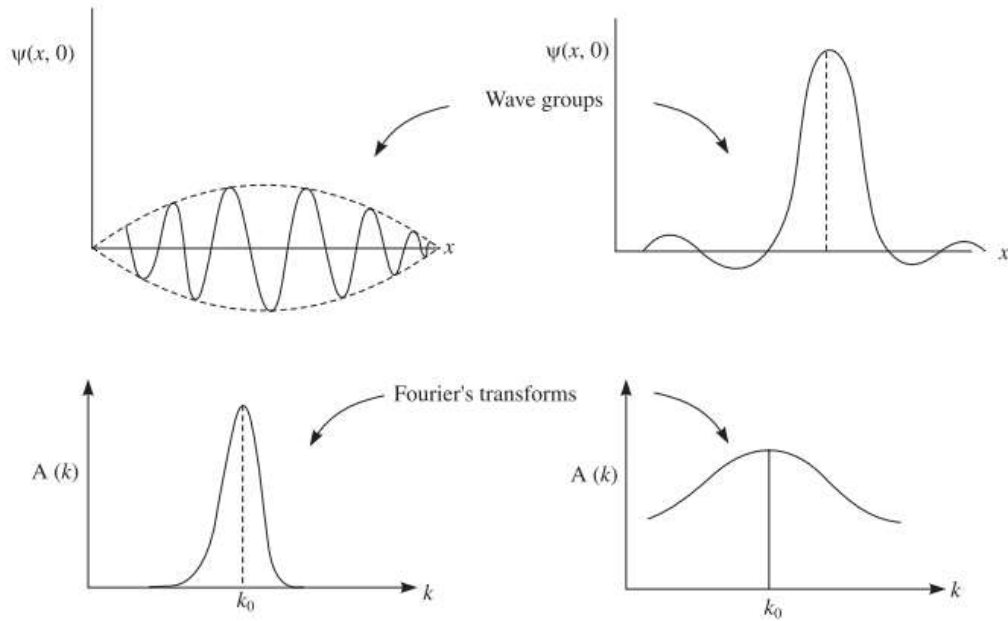
وبشكل عام ، يمكن تمثيل تركيب عدة موجات جيبيية كما يلي

$$\psi(x,t) = \sum_n A_n e^{i(k_n x - \omega_n t)} \quad \dots(2.6.3)$$

إذا كانت مكونات الموجات المترابطة تملك ترددات وثوابت انتشار ذات توزيع متصل فإن المجموع في معادلة (2.6.3) يؤول الى الصيغة التكاملية ، اي

$$\psi(x,t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad \dots(2.6.4)$$

تمثل المعادلة (2.6.3) **متسلسلة فورييه** للدالة  $\Psi(x,t)$  ، كما تمثل معادلة (2.6.4) تكامل فورييه للدالة  $\Psi(x,t)$  . وتمثل دالة السعة  $A(k)$  سعة مركبة الموجة التي لها ثابت انتشار  $k$  . بالإختيار المناسب لدالة السعة  $A(k)$  ، يمكن بناء مجموعة موجة *wave group* بالشكل المرغوب فيه . يبين الشكل (2.6.2) بعض رزم موجية ذات دالة سعة  $A(k)$  ، وتعرف دالة السعة هذه **بتحويل فورييه Fourier's Transform** لרزمة الموجة .



شكل (2.6.2) مخطط مجموعات موجية وتحويل فورييه لها .

يلاحظ ان رزمة الموجة الممتدة في الفضاء بشكل واسع تقابل دالة سعة حادة القمة والعكس صحيح . اذا كانت  $\Delta x$  تعبر عن اتساع رزمة الموجة و كان  $\Delta k$  تعبر عن مدى ثوابت الإنتشار الذي فيه تتوزع السعات ، فإن من الممكن اثبات التالي ،

$$\Delta x \cdot \Delta k = 1 \quad \dots(2.6.5)$$



تعبّر معادلة (2.6.5) عن العلاقة العكسية بين المتغيريين  $\Delta x$  ،  $\Delta k$  ، وهي تشكل اساس مبدأ هيزنبرغ في اللاتحديد .

### (2.7) سرعة الجسيم وسرعة المجموعة *Particle Velocity and Group Velocity*

وفقا لفرضية دي برولي فإن العلاقة بين زخم جسيم ما  $p$  مع طول موجته المرافقة  $\lambda$  ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) تكون كما يلي

$$p = \hbar k$$

ووفقا لأينشتين ، ترتبط طاقة الجسيم  $E$  مع كتلته وتردده الذاتي ( $\omega$ ) *intrinsic frequency* بالعلاقة التالية :

$$E = mc^2 = \hbar\omega$$

وعليه ، تكون سرعة طور موجات دي برولي الممثلة لهذا الجسيم كما يلي

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{mc^2/\hbar}{p/\hbar} = \frac{mc^2}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \quad \dots(2.7.1)$$

بما ان سرعة الجسيم  $v$  اقل من سرعة الضوء  $c$  ، لذلك تكون سرعة الطور  $u$  اكبر من سرعة الضوء . هكذا لا يمكن الترافق بين الجسيم و موجات الطور . بالرغم من ان سرعة الطور اكبر من سرعة الضوء ، الا ان هذا لا يتناقض مع النظرية النسبية لأن موجات الطور لا تحمل طاقة .

فيما يلي سنبرهن ان سرعة الجسيم تساوي سرعة المجموعة لרزمة الموجة المقابلة .

سرعة الجسيم هي

$$v = \frac{p}{m} = \frac{pc^2}{mc^2} = \frac{pc^2}{E} \quad \dots(2.7.2)$$

باستخدام العلاقات :  $E = \hbar\omega$  ،  $p = \hbar k$  ، نجد ان التغير في هذه الكميات يكون كما يلي

$$dp = \hbar dk , dE = \hbar d\omega \Rightarrow dE/dp = d\omega/dk$$

تكون سرعة المجموعة لرزمة الموجة كما يلي

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad \dots(2.7.3)$$

حيث ان طاقة الجسيم النسبية هي

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

اذن

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} \quad \dots(2.7.4)$$

من المعادلات (2.7.2 - 2.7.4) نحصل على ما يلي

$$v_g = \frac{pc^2}{E} = v \quad \dots(2.7.5)$$

هكذا يحصل تمثيل الجسيم برزمة موجة على دعم منطقي .

## (2.8) مبدأ هيزنبرغ في الشك او مبدأ اللاتحديد *Heisenberg's Uncertainty Principle*

وفقا لمبادئ الميكانيكا الكلاسيكية ، يفترض أن موضع وزخم اي جسيم لهما قيم معرفة جيدا ونستطيع تحديدها أنيا بدقة تامة . لكن هذا الفرض يتعارض مع فكرة ازدواجية الجسيم الموجي *wave particle* . في عام 1927 ، وضع العالم الفيزيائي الألماني ويرنر هيزنبرغ مبدأ ينص على ما يلي : **من غير الممكن تحديد موضع وزخم جسيم ما أنيا وبدقة تامة .** ويعبر عن هذا المبدأ رياضيا كالتالي :

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar \quad \dots(2.8.1)$$

حيث  $\Delta x$  تمثل عدم الدقة *uncertainty* في تحديد موضع الجسيم و  $\Delta p_x$  تمثل عدم الدقة في تحديد الزخم المقابل .

وبالمثل ، اذا كانت  $\Delta E$  تعبر عن عدم الدقة في تحديد طاقة الجسيم و كانت  $\Delta t$  هي عدم الدقة في تحديد الزمن فإن

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \quad \dots(2.8.2)$$

عمليا ، تشير معادلة (2.8.1) الى التالي ك اذا اردنا ان نقيس موضع الجسيم بدقة متناهية ، اي :  $\Delta x \rightarrow 0$  ، فإن مقدار عدم الدقة لقياس الزخم المقابل يصبح كبير جدا ، اي :  $\Delta p_x \rightarrow \infty$  ، وبالعكس.

لتوضيح ماسبق ، نفرض ان جسيما ما يملك زخما معرف جيدا  $p_x (= \hbar k)$  well- defined . كما تكون طول الموجة المرافقة  $\lambda$  او  $k$  معرفة جيدا والتي تمثل بمنحنى جيبي ( موجة وحيدة اللون *monochromatic wave* ). لنفرض ان هذه الموجة تكون بدون بداية وبدون نهاية ( طول لا نهائي ) وذات سعة ثابتة لكل قيم احداثيات الفضاء ( الشكل 2.8.1 ). وعليه ، يمكن للجسيم التواجد في اي موضع بين  $x = -\infty \rightarrow x = +\infty$  . هكذا يكون موضع الجسيم غير محدد تماما (  $\Delta x \rightarrow \infty$  ) .



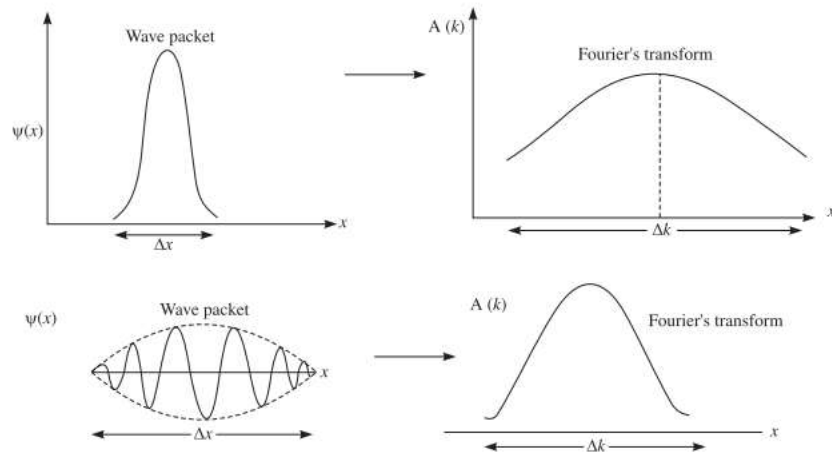
شكل (2.8.1) مخطط لوصف جسيم محدد الزخم بواسطة موجة جيبية .

لنفرض ان موضع الجسيم محدد جيدا (  $\Delta x \rightarrow 0$  ) ، لذلك يوصف هذا الجسيم برزمة موجة ذات امتداد صغير جدا في الفضاء . يظهر تحويل فورييه لرزمة الموجة هذه انها تتألف من تركيب عدد كبير جدا من الأمواج ذات التوزيع المتصل لقيم  $k$  او  $\lambda$  خلال مدى كبير من  $\Delta k$  . هكذا تكون عدم الدقة في تحديد  $k$  او  $p$  كبيرة جدا (  $\Delta k \rightarrow \infty$  ) .

وهكذا يكون للجسيم ، الذي يحدد زخمه بعدم دقة صغيرة نسبيا ، عدم دقة كبيرة في تحديد موضعه .

اذا كانت موجة جيبية ذات تردد معرف جيدا فإن طاقة هذه الموجة  $(E = \hbar\omega)$  تكون معرفة جيدا ايضا ، وتكون طاقة الجسيم  $E$  الذي يصف هذه الموجة معرف الطاقة جيدا ولذلك  $\Delta E = 0$  . لبيان ثبوت سعة هذه الموجة الجيبية ، الممتدة من الفترة الزمنية :  $t = -\infty \rightarrow t = \infty$  ، يجب علينا النظر لفترة زمنية طويلة . لذلك ، تكون عدم الدقة في تحديد الزمن لانهاية *infinite* (  $\Delta t \rightarrow \infty$  ) .

لنفرض ان جسيما ما يوصف برزمة موجية كما في الشكل (2.8.2)



شكل (2.8.2) مخطط رزمة موجة وتحويل فوريير لها .

لنفرض ان  $\Delta x$  يمثل اتساع رزمة الموجة في الفضاء و  $\Delta k$  يمثل اتساع ثابت الإنتشار لهذه الرزمة . رياضيا ، يمكن ايضاح ان

$$\Delta x \Delta k \geq 1 \quad \dots(2.8.3)$$

بما ان  $p = \hbar k \rightarrow \Delta p = \hbar \Delta k$  ، لذلك نحصل على التالي

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar \quad \dots(2.8.4)$$

المعادلة (2.8.4) تمثل علاقة اللاتحديد ( الشك).

من الجدير بالذكر ان اللاتحديد في قياس الموضع والزخم لجسيم ما لا يكون بسبب القصور في الأدوات المستخدمة في عملية القياس ، حتى بإستخدام الأدوات المثالية لا نستطيع الحصول على نتيجة افضل . وعليه ، يعتبر هذا المبدأ قانونا اساسيا في الطبيعة . وملخص القول هو ان الزخم والموضع لجسيم ما لا يمكن افتراض قيمها معرفة جيدا بشكل متزامن ( أي ) . وبسبب صغر قيمة ثابت بلانك ، يكون مبدأ اللاتحديد غير مهم في العالم العياني *Macroscopic world* ، بينما نجد ان هذا المبدأ لا يمكن تجاهله في العالم المجهرى *microscopic world* .

## تمارين محلولة

(1) برهن ان طول موجة المصاحبة للإلكترون يتسارع في منطقة فرق جهد  $V$  تعطى العلاقة التالية

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m eV}} = \frac{12.3}{\sqrt{V(\text{volt})}} \text{ \AA}$$

الحل

طاقة الإلكترون الحركية هي

$$T = \frac{p^2}{2m} = eV$$

اذن

$$p = \sqrt{2m\Gamma} = \sqrt{2m \text{ eV}}$$

لذلك

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\Gamma}} = \frac{h}{\sqrt{2m \text{ eV}}}$$

بتعويض القيم التالية:

$$; m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ Js},$$

نحصل على ما يلي

$$\lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \times 10^{-10} \text{ m} = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \text{ \AA}$$

(2) جد تعبيراً رياضياً لطول موجة جسيم يتحرك بسرعة نسبية ؟

الحل

الزخم النسبي للجسيم هو كما يلي

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

اذن

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{m_0 v} = \frac{h}{m_0 c} \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{(v/c)}$$

كما يمكن التعبير عن طول الموجة بدلالة الطاقة الحركية كما يلي

$$E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2 = (T + m_0c^2)^2$$

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}}{c}$$

بالتالي

$$\lambda = h/p$$

$$= \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}} \frac{1}{\sqrt{1 + T/2m_0c^2}}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2m_0T}} \left(1 + \frac{T}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}$$

إذا كان الجسم هو الكتلون متسارعا في منطقة فرق جهد  $V$  ، تكون طول موجة دي برولي كما يلي

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV}} \left(1 + \frac{eV}{2m_0c^2}\right)^{-1/2}$$

(3) جد طول موجة دي برولي لما يلي (i) لإلكترون سرعته  $100\text{m/s}$  (ii) جسم كتلته  $100\text{gm}$  وسرعته  $100\text{ m/s}$

الحل

(i) طول موجة دي برولي للإلكترون

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1000 \text{ m/s})} = 7285 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$= 7285 \text{ \AA}$$

(ii) طول موجة دي برولي للجسم

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{(0.1 \text{ kg})(1000 \text{ m/s})} = 8.63 \times 10^{-36} \text{ m}$$

بسبب كون طول الموجة صغير جدا ، لذلك لا يتصرف الجسم كموجة .

(4) جد طول موجة دي برولي لكل من الإلكترون ، البروتون ، و جسيم ألفا حيث جميعها تملك طاقة حركية  $100 \text{ eV}$  .؟

الحل

الإلكترون:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(100 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J})}}$$

$$= 1.23 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.23 \text{ \AA}$$

البروتون :

$$m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg},$$

$$\lambda = 0.028 \text{ \AA}$$

جسيم الفا :

$$m = 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\lambda = 0.014 \text{ \AA}$$

(5) لأي طاقة حركية تجعل الكترون يملك طول موجة تساوي طول موجة الخط الأصفر في طيف الصوديوم

$$\lambda = 5896 \text{ \AA}^0 \text{ ؟}$$

الحل

حيث

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}$$

إذا

$$T = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

بتعويض القيم التالية

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}, m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}, \lambda = 5896 \times 10^{-10} \text{ m},$$

نجد ان

$$T = 6.93 \times 10^{-25} \text{ J} = 4.3 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

(6) ما مقدار طول موجة النيوترون الحراري عند درجة حرارة  $300 \text{ K}$  ؟.

**الحل**

الطاقة الحركية للنيوترون الحراري هي

$$E = \frac{3}{2} kT = \frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \times 300 \text{ K}}{2} = 6.2 \times 10^{-21} \text{ J}$$

اذا

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 6.2 \times 10^{-21} \text{ J}}} = 1.45 \text{ \AA}$$

(7) جد طول موجة دي برولي لجزيء الهيدروجين ، التي تقابل سرعته الأكثر احتمالا عند درجة حرارة  $27^\circ \text{ C}$  ؟

**الحل**

تكون السرعة الأكثر احتمالا لجزيء الهيدروجين عند درجة حرارة  $T$  هي

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

كما يكون الزخم الخطي كالتالي

$$p = mv = \sqrt{2mkT}$$

اذا



$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mkT}}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-10} \text{ Js}}{\sqrt{2 \times (3.34 \times 10^{-27} \text{ kg})(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}}$$

$$= 1.26 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.26 \text{ \AA}.$$

(8) عند اي قيمة للطاقة الحركية تكون طول موجة دي برولي مساوية لطول موجة كومبتن ؟

**الحل**

طاقة الإلكترون هي

$$E = T + m_0c^2 = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

إذا

$$p = \frac{\sqrt{T^2 + 2m_0c^2T}}{c}$$

تكون طول موجة دي برولي للإلكترون كما يلي

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T^2 + 2m_0c^2T}}$$

باستخدام المعطى التالي

$$\lambda = \lambda_c = \frac{h}{m_0c}$$

نحصل على التالي

$$\frac{h}{m_0c} = \frac{hc}{\sqrt{T^2 + 2m_0c^2T}}$$

$$T = -m_0c^2 \pm \sqrt{2} m_0c^2 \quad (- \text{ sign is meaningless})$$

$$T = m_0c^2 (\sqrt{2} - 1) = (0.51 \text{ MeV})(0.414) = 0.21 \text{ MeV}.$$

(9) جد طول موجة دي برولي للإلكترونات النسبية الواصلة لمصعد انبوبة اشعة X- اذا كان اقصر حد في طول موجة الطيف المتصل للأشعة السينية يساوي  $0.10\text{Å}$  ؟

الحل

لنفرض ان  $\lambda_0$  تمثل الحد الأقصر لطول موجة طيف الأشعة السينية ، اذن

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV} \quad \therefore eV = \frac{hc}{\lambda_0}$$

طاقة الإلكترون الحركية هي

$$T = eV = hc/\lambda_0$$

كما ان الزخم الخطي للإلكترون هو

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}}{c}$$

اذا ، تكون طول موجة دي برولي للإلكترون كالتالي

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{\frac{hc}{\lambda_0} \left( \frac{hc}{\lambda_0} + 2m_0c^2 \right)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \frac{(2m_0c^2)\lambda_0}{hc}}}$$

بتعويض القيم التالي ، نحصل على ما يلي

$$m_0c^2 = 0.51 \text{ MeV}, hc = 0.0124 \text{ MeV } \text{Å}.$$

$$\lambda = \frac{0.10 \text{ Å}}{\sqrt{1 + \frac{1.02 \times 0.10}{0.0124}}} = 0.033 \text{ Å}.$$

(10) جد طول موجة دي برولي للإلكترون يتحرك في مدار بور الأول لذرة الهيدروجين .؟

## الحل

الزخم الزاوي للإلكترون في مدار بور الأول هو

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

إذا

$$mv = \frac{h}{2\pi r}$$

طول موجة دي برولي للإلكترون هي

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 2\pi r = 2 \times 3.14 \times 0.53 \text{ \AA} = 3.3 \text{ \AA}.$$

(11) صف شرط بور الكمي بدلالة طول موجة برولي ؟

## الحل

يجب ان يتوافق مدار بور المستقر مع عدد صحيح من اطوال موجة دي برولي . اذا كان  $r$  هو نصف قطر مدار الإلكترون فإن

$$2\pi r = n\lambda \quad \dots(1)$$

وفقا لفرضية دي برولي فإن

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \dots(2)$$

بحذف  $\lambda$  من المعادلتين السابقتين نحصل على

$$2\pi r = \frac{nh}{mv}$$

او

$$mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

وهذا شرط بور الكمي .

(12) اذا كانت سرعة جسم ما  $1000 \text{ m/s}$  ، جد مقدار الدقة لتحديد موضع هذا الجسم اذا كان هذا الجسم

(a) رصاصة كتلتها  $0.05 \text{ kg}$  (b) إلكترون ؟.

الحل

(a) الزخم الخطي للرصاصة هو

$$p = mv = (0.05 \text{ kg})(1000 \text{ m/s}) = 50 \text{ kg m/s}$$

تكون القيمة الصغرى لعدم دقة تحديد الموضع هي

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{5 \times 10^{-3} \text{ kg m/s}} = 2.1 \times 10^{-31} \text{ m}$$

(b) زخم الإلكترون الخطي هو

$$p = mv = (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(1000 \text{ m/s}) = 9.1 \times 10^{-28} \text{ kg m/s}$$

عدم الدقة لتحديد هذا الزخم يساوي

$$\Delta p = 9.1 \times 10^{-28} \times 0.0001 = 9.1 \times 10^{-32} \text{ kg m/s}$$

كما تكون عدم الدقة لتحديد الموضع هي

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{9.1 \times 10^{-32} \text{ kg m/s}} = 0.115 \text{ m}$$

نلاحظ ان الشك في تحديد موضع الرصاصة يكون صغير جدا بحيث يكون بعيدا عن احتمال قياسه . ولهذا ، نرى في حالة الأجسام العيانية ( الرصاصة ) ، لا يكون هناك قيود لقياس الكميات المترافقة ديناميكيا ( الموضع- الزخم) . بينما في حالة الإلكترون ، يكون الشك في تحديد موضعه كبير جدا ، حوالي  $10^7$  مرة لمقدار ابعاد الذرة . لهذا للأجسام المجهرية كالالكترونات ، يكون الشك في تحديد موضعها مهما لدرجة لا يمكن اهماله .

(13) يقاس موضع وزخم الكترون طاقته  $1 \text{ keV}$  أنيا . اذا كان هذا الموضع ضمن  $1 \text{ \AA}$  ، جد النسبة المئوية لعدم الدقة ( الخطأ ) في تحديد زخمه ؟.

الحل

عدم دقة زخم الإلكترون هو

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-10} \text{ m}} = 1.054 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}$$

يمكن اعتبار ان الزخم الخطي للإلكترون داخل الذرة على الأقل مساويا لهذه الكمية .وعليه ، تكون طاقة الإلكترون الحركية المقابلة كما يلي

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(1.054 \times 10^{-24} \text{ kg m/s})^2}{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 0.061 \times 10^{-17} \text{ J} = 3.8 \text{ eV}$$

نلاحظ ان جهد تأين الذرات يكون من نفس الرتبة وعليه تكون عدم دقة تحديد الزخم متوافقة مع طاقة ربط الإلكترونات مع الذرات .

(14) تخيل ان الكترونا محصورا في نواة ابعادها  $10^{-14} \text{ m}$  . جد مقدار الشك ( عدم الدقة) في زخم هذا الإلكترون ؟

**الحل**

باستخدام قاعدة هيزنبرغ في الشك، يكون الخطأ ( عدم الدقة ) في زخم هذا الإلكترون الافتراضي كما يلي

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-14} \text{ m}} = 1.054 \times 10^{-20} \text{ kg m/s}$$

وعليه ، يكون مقدار الزخم مساويا على الأقل لمقدار هذا الخطأ ، اي  $p \geq \Delta p$  . كما تكون الطاقة الحركية لهذا الإلكترون اكبر عدة مرات من طاقة سكون الإلكترون  $m_0 c^2$  ، ولذلك يمكن ان نعتبر طاقة الإلكترون الحركية تساوي  $pc$  . او

$$T = pc = (1.054 \times 10^{-20} \text{ kg m/s})(3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 3.3 \times 10^{-12} \text{ J} \\ = 20 \text{ MeV}$$

عمليا ، برهنت التجارب ان طاقة الإلكترونات في انحلال جسيم بيتا  $\beta$  decay تكون اقل بكثير من 20 MeV . لهذا قضت قاعدة الشك على اي احتمالية لتواجد الإلكترون داخل النواة .

(15) اعتبر تواجده البروتون او النيوترون داخل النواة ، جد عدم الدقة في تحديد الزخم الخطي لهذه الجسيمات ؟ . ثم بين فيما ان كان هذا الفرض يتوافق مع طاقة الربط النووي لمكونات النواة ؟ .

**الحل**

الخطأ ( عدم الدقة ) في تحديد زخم البروتون هو

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-14} \text{ m}} = 1.054 \times 10^{-20} \text{ kg m/s}$$

كما تكون الطاقة الحركية المقابلة تساوي  $T \ll m_0 c^2$  لهذا

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(1.054 \times 10^{-20} \text{ kg m/s})^2}{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.6 \times 10^{-14} \text{ J} = 0.23 \text{ MeV}$$

وهذا المقدار من الطاقة الحركية هو من نفس رتبة طاقة الربط النووي .

(16) اذا كانت طاقة المتذبذب التوافقي  $E$  هي

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

استخدم قاعدة الشك لبرهان ان طاقة المتذبذب الصغرى تساوي  $\hbar \omega_0$  ، حيث  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  ؟

**الحل**

حسب قاعدة الشك ،  $\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$  ، فإن الزخم الخطي للمتذبذب على الأقل يكون كما يلي:  $p = \frac{\hbar}{x}$  .  
ونعبر عن طاقة المتذبذب كما يلي

$$E = \frac{\hbar^2}{2mx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \quad \dots(1)$$

باستخدام شرط القيمة الصغرى ، نحصل على ما يلي

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 = -\frac{\hbar^2}{mx^3} + kx \Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}}$$

بتعويض قيمة  $x^2$  في معادلة (1) ، نجد ان

$$E = \hbar \sqrt{k/m} = \hbar \omega_0.$$

(17) تتواجد نواة في حالة مثارة لمدة  $10^{-12} \text{ sec}$  . جد مقدار عدم الدقة ( الخطأ ) في قياس طاقة شعاع جاما  $\gamma \text{ ray}$  المنبعث من هذه النواة ؟

**الحل**

تكون القيمة الصغرى لخطأ قياس الطاقة مساويا للمقدار  $\Delta E$  ، حيث

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$$

لذلك

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1.054 \times 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-12} \text{ s}} = 1.054 \times 10^{-22} \text{ J.}$$

(18) اذا كان متوسط الذرات المثارة يملك فترة حياة تساوي  $10^{-8} \text{ sec}$  ، وخلال هذه الفترة الزمنية تبعث هذه الذرات فوتونات . جد القيمة الصغرى لخطأ قياس تردد هذه الفوتونات ؟ .

**الحل**

وفقا لمبدأ الشك ، يكون

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar$$

$$\hbar \Delta \omega \Delta t \geq \hbar$$

وعليه ، يكون اصغر خطأ ممكن لقياس تردد الفوتون هو

$$\Delta \omega = \frac{1}{\Delta t} = 10^8 \text{ rad/s.}$$

(19) باستخدام مبدأ الشك ( الخطأ ) ، اعط تقديرا لنصف قطر وطاقة ربط الإلكترون في ذرة الهيدروجين في الحالة الأرضية ؟ .

**الحل**

طاقة الإلكترون هي

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \dots(1)$$

بفرض ان الخطأ في كل من الزخم والطاقة يساوي نفس الزخم والطاقة ، لذلك يكون مبدأ الشك كالتالي

$$pr = \hbar \quad \dots(2)$$

بحذف  $p$  من المعادلتين ، نحصل على

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \dots(3)$$

في الحالة الأرضية ، تكون الطاقة ذات قيمة صغرى . لذلك ،

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{2\hbar^2}{2mr^3} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

وعليه ،

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} \quad \dots(4)$$

تسمى قيمة  $r$  ، التي تمثل نصف قطر ذرة الهيدروجين في الحالة الأرضية ، **نصف قطر بور** ( $a_0$ ) .  
تعويض قيمة  $r$  في معادلة (3) ، نجد ان طاقة الذرة في الحالة الأرضية تكون كما يلي

$$E = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{me^4}{\hbar^2}. \quad \dots(5)$$

## تمارين

(1) برهن ان طول موجة الإلكترون المتسارع في منطقة فرق جهد  $V$  (فولت) تكون كما يلي

$$\lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V(\text{volt})}} \text{ \AA}.$$

(2) برهن انه يمكن التعبير عن مبدأ الاحتمية ( الشك ) على الصورة التالية:  $\Delta L \Delta \theta \geq \hbar$  ، حيث يمثل  $\Delta L$  الخطأ في قياس الزخم الزاوي ويمثل  $\Delta \theta$  الخطأ في تحديد الموضع الزاوي للجسيم في التجربة .

(3) يمر شعاع الكتروني طاقته  $100\text{eV}$  من خلال ثقب دائري نصف قطره  $5 \times 10^{-4} \text{ cm}$  ، جد الخطأ المحتمل في تحديد زاوية خروج هذا الشعاع ؟

(4) تمر كرة رصاصية كتلتها  $200 \text{ gram}$  خلال ثقب نصف قطره  $25 \text{ cm}$  . احسب الخطأ المحتمل في تحديد زاوية الخروج ، علما ان سرعة الكرة تساوي  $20\text{m/s}$  ؟.



(5) بحسب مبدأ الشك ، لا يمكن لجسيم زخمه الخطي  $p$  ان ينحصر بفعل القوة المركزية في دائرة نصف قطرها  $r$  ، حيث  $r < \hbar/p$  . برهن ان الطاقة الكلية للإلكترون في ذرة الهيدروجين تكون كالتالي

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

، ثم بين ان عند القيمة الصغرى للطاقة  $E$  فإن قيمة  $r$  تساوي قيمة نصف قطر بور ، او

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.53 \text{ \AA}$$

(6) اذا كانت دقة قياس طول موجة فوتون تساوي جزء من مليون ، اي :  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-6}$  ، جد قيمة اصغر

خطأ في تحديد قياس متزامن لموضع الفوتون  $\Delta x$  في الحالات التالية

(a) فوتون بطل موجة  $6000\text{\AA}$  (b) فوتون الأشعة السينية بطول موجة  $5\text{\AA}$  ؟

(7) برهن باستخدام مبدأ اللاتحديد صحة العبارة التالية : تملك الذرات في المادة الصلبة كمية معينة من الطاقة ( طاقة النقطة الصفرية الصغرى ) حتى عند درجة الصفر المطلق .

(3.1) مقدمة Introduction

حيث ان القوانين المتحكممة في سلوك الأنظمة المجهرية تختلف بشكل جذري عن تلك القوانين للأنظمة العيانية ، لذلك كان هناك اتجاهات لوضع تصورا لجسيمات هذه الأنظمة ويكون صالحا لوصف سلوكها . فمثلا ، فكرة ان الإلكترون عبارة عن كرة سالبة الشحنة ويعمل حركات مدارية ومغزلية هي مجردة وغير حقيقية *unrealistic* . وكان *ويرنر هيزنبرغ* و *ديراك* هم اول من وضع قوانين ميكانيكا الكم من خلال عدة فرضيات . وعليه ، نجد ان اللغة الرياضية لميكانيكا الكم هي شاذة جدا ومن غير الممكن تمثيلها مما جعل فهم هذه القوانين عسيرا .

يعتمد بناء ميكانيكا الكم على قاعدة اولية تعرف **بالحالة state** ، ويتم وصف الحالة **بدالة مركبة complex function** ،  $\psi$  . ويمكن اشتقاق كل المعلومات المتعلقة بهذا النظام من خلال هذه الدالة اذا حصلنا على كيفية تطور هذه الدالة مع الإحداثيات المكانية والزمانية . ويتم الحصول على المعلومات المتعلقة بحالة النظام بعمل قياسات، اي بجعل هذا النظام يتفاعل مع ادوات القياس ( التي هي نظام عياني) . وتباعا يتم التعبير عن نتائج القياسات المعمولة على النظام المجهري بدلالة مفاهيم تطورت لتمييز الأجسام العيانية ( الإحداثيات ، الزخم ، الطاقة ، والزخم الزاوي.... الخ) . تسمى هذه المميزات للنظام المجهري **بالمغيرات الديناميكية dynamical variables** او **المتغيرات الظاهرة observables** .

في هذا الفصل نتناول بشكل مبسط اسس ميكانيكا الكم التي تشكلت على يد العالم *ايرون شرودنجر* في عام 1926.

يمكن القول ان الموجات ذات السلوك المشابه للجسيمات المادية يسمح بانتساب موجة مرافقة للجسيم المتحرك ، والتي تعرف **بالموجات المادية matter waves** . ويشار لهذه الموجات بالدالة الرياضية  $\psi$  وهي تحاكي دالة ازاحة الموجات الميكانيكية او مكونات المجالات الكهربائية والمغناطيسية في الأمواج الكهرومغناطيسية . رياضيا ، تكون دالة الموجة هذه حلا لما يعرف بمعادلة الموجة الكلاسيكية *classical wave equation* التالية

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \dots(3.1.1)$$

حيث تمثل الدالة  $\psi$  الإزاحة في الوسط في حالة الموجات الميكانيكية او مركبات المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي في الموجات الكهرومغناطيسية . من الطبيعي التوقع ان تكون دالة الموجة التي تصف الجسيم المادي هي من نوع حلول المعادلة التفاضلية (3.1.1) .

من المعلوم ان اشتقاق معادلة الموجات الميكانيكية يكون بإستخدام قانون نيوتن الحركي وان معادلة الموجات الكهرومغناطيسية يتم اشتقاقها بإستخدام معادلات ماكسويل في النظرية الكهرومغناطيسية . وبما انه لا يوجد هناك اي معادلة اساسية لأشتقاق معادلة الموجات المادية ، مما جعل شرودنجر ان يفترض الصيغة الصحيحة

لمعادلة الموجات المادية . كما وجد ان هذه المعادلة تتفق تماما مع التجارب العملية ولذلك يمكن اعتبارها فرضية صالحة لتطوير قصة الميكانيكا الكمية .

### (3.2) معادلة شرودنجر *Schrodinger Equation*

تكون دالة الموجة لجسيم يتحرك في اتجاه محور  $x$  كالتالي

$$\psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - k_x x)} = Ae^{i(k_x x - \omega t)} \quad \dots(3.2.1)$$

حيث سمات الموجة هي :  $\omega = 2\pi\nu$  ,  $k_x = 2\pi/\lambda$  . وترتبط هذه السمات مع سمات الجسيم  $p_x$ ,  $E$  كما يلي

$$p_x = \hbar k_x, \quad E = \hbar\omega \quad \dots(3.2.2)$$

وعليه ، يمكن التعبير عن دالة الموجة كالتالي

$$\psi(x, t) = A \exp\left\{-i\left(\frac{Et}{\hbar} - \frac{p_x x}{\hbar}\right)\right\} \quad \dots(3.2.3)$$

من هذه المعادلة ، نجد ان

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{iE}{\hbar} \psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= E\psi \end{aligned} \quad \dots(3.2.4)$$

وبالمثل ،

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{ip_x}{\hbar} \psi \\ -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} &= p_x \psi \end{aligned} \quad \dots(3.2.5)$$

بتفاضل معادلة (3.2.5) بالنسبة للمتغير  $x$  ، نحصل على

$$-i\hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = p_x \frac{\partial \psi}{\partial x} = i \frac{p_x^2}{\hbar} \psi$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = p_x^2 \psi \quad \dots(3.2.6)$$

في حالة السرعة غير النسبية ، تكون الطاقة الكلية E للجسيم الحر المتحرك في اتجاه محور x مساوية لطاقته الحركية T . اي ،

$$E = T = \frac{p_x^2}{2m}$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بدالة الموجة  $\psi$  ، نحصل على ما يلي

$$E\psi = \frac{p_x^2}{2m} \psi \quad \dots(3.2.7)$$

بأستخدام معادلتني (3.2.4) ، (3.2.6) يمكن كتابة معادلة (3.2.7) على النحو التالي

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \dots(3.2.8)$$

تعرف المعادلة (3.2.8) بمعادلة شرودنجر الزمنية للجسيم الحر *time – dependent Schrodinger equation*

، اما اذا تحرك جسيم ما في مجال قوة الموصوف بدالة طاقة كامنة V ، فإن طاقة هذا الجسيم الكلية تكون كالتالي

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$$

وتكون معادلة شرودنجر كما يلي

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi} \quad \dots(3.2.9)$$

اذا كان الجسيم حر الحركة في الأبعاد الثلاثة ، تمثل دالة الموجة كما يلي

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp\{-i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\}$$

$$= A \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} (Et - p_x x - p_y y - p_z z) \right\} \quad \dots(3.2.10)$$

من معادلة (3.2.10) ، نحصل على التالي

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \quad \dots(3.2.11)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_x \psi \quad \text{and} \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = p_x^2 \psi \quad \dots(3.2.12)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y} = p_y \psi \quad \text{and} \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = p_y^2 \psi \quad \dots(3.2.13)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial z} = p_z \psi \quad \text{and} \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = p_z^2 \psi \quad \dots(3.2.14)$$

كما تكون الطاقة الكلية للجسيم كالتالي

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x, y, z) \quad \dots(3.2.15)$$

باستخدام معادلات (3.2.114 - 3.2.11) يمكن كتابة معادلة (3.2.15) كما يلي

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi + V\psi$$

او

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi} \quad \dots(3.2.16)$$

حيث

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

وهذا يعرف بمؤثر لابلاس *Laplace Operator* . كما تعرف معادلة (3.2.16) بمعادلة شرودنجر الزمنية للجسيم في الأبعاد الثلاثة .

حالة الثبات : معادلة شرودنجر المستقلة زمنيا

### Steady state: Time- independent Schrodinger Equation

عندما تكون طاقة الجهد  $V$  غير معتمدة على الزمن ، يمكن التعبير عن دالة الموجة  $\psi(x, t)$  كحاصل ضرب دالتين موجيتين: احدهما دالة للموضع  $x$  واخرى دالة للزمن  $t$  . اي ،

$$\psi(x, t) = \psi(x)f(t) \quad \dots(3.2.17)$$

بتعويض معادلة (3.2.16) في معادلة (3.2.10) وبقسمة المعادلة الناتجة على  $\psi(x)f(t)$  نجد ان

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V \quad \dots(3.2.18)$$

نلاحظ ان الطرف الأيسر في معادلة (3.2.18) يكون دالة للزمن  $t$  فقط ويكون الطرف الأيمن في هذه المعادلة دالة للموضع  $x$  فقط . بما ان كلا من المتغيرات  $x, t$  تكون مستقلة ، لذلك تكون هذه المعادلة صحيحة اذا اعتبرنا ان كل طرف فيها مساو لنفس الثابت . كما يكون كل طرف من هذه المعادلة له نفس ابعاد dimension الطاقة . وعليه ، يمكن اعتبار هذا الثابت ( ثابت النفوذ ) يساوي  $E$  ( الطاقة الكلية للجسيم ) . اي ،

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{df}{dt} = E \quad \dots(3.2.19)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V = E \quad \dots(3.2.20)$$

يمكن التعبير عن معادلة (3.2.19) كالتالي

$$\frac{df}{dt} - \frac{E}{i\hbar} f = 0,$$

بتكامل هذه المعادلة نحصل على

$$f(t) = C \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad \dots(3.2.21)$$

حيث  $C$  ثابت التكامل .

يقال ان الجسيم الذي يوصف بدالة الموجة  $\psi(x, t) = \psi(x). e^{-iEt/\hbar}$  يكون في الحالة المستقرة *stationary state* لأن كثافة الإحتمال  $\psi(x, t)\psi^*(x, t)$  تكون مستقلة زمنياً .

ويعبر عن معادلة شرودنجر المستقلة زمنياً كما يلي

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad \dots(3.2.22)$$

او

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \dots(3.2.23)$$

حيث

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V$$

وهذا يعرف بمؤثر هاملتون *Hamilton operator* ، وهو المؤثر الممثل للطاقة الجسيم الكلية . كما يمكن كتابة معادلة (3.2.22) كالتالي

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0 \quad \dots(3.2.24)$$

فيزيائياً ، اذا كانت طاقة الجهد للنظام دالة للإحداثيات فقط ، تبقى الطاقة الكلية لهذا النظام ثابتة مع الزمن ، اي تكون E محفوظة *conserved* ، ويسمى هذا النظام **بالنظام المحافظ** *conservative system* ، وفيه تؤول دالة هاملتون الميكانيكية الكلاسيكية الى الطاقة الكلية للنظام والتي يعبر عنها بدلالة الإحداثيات والزخوم المرافقة *conjugate momenta* .

تسمى المعادلة (3.2.23) **معادلة القيم الذاتية** *Eigen value equation*

كما تكون معادلة شرودنجر المعتمدة على الزمن *time- dependent* على النحو التالي

$$\hat{H}\psi(x, t) = \hat{E}\psi(x, t)$$

حيث

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{V} \quad \text{and} \quad \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

### (3.3) المعنوية الفيزيائية لدالة الموجة $\psi$ Physical Significance of Wave Function

من الطبيعي ان يتبادر للذهن السؤال المتعلق بالمعنى الفيزيائي لدالة الموجة  $\psi$ . في حالة الأوتار المهتزة ، تمثل هذه الدالة ازاحة الوتر عن موقع الإتزان ، وفي حالة الموجات الكهرومغناطيسية فهي تمثل المجال الكهربائي او المجال المغناطيسي عند تلك النقطة المعتبرة .ولكن لا يوجد اي كمية فيزيائية مرافقة لدالة الموجة هذه . مثلما ان مفاهيم المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي هي تجريد لتفسير التفاعل بين الشحنات الكهربائية ، يكون مفهوم دالة الموجة تجريدا وصفيا لديناميكية الجسيمات المجهريية . في عام 1926 اقترح ماكس بورن تفسيراً احصائياً نافعا لدالة الموجة ، الذي استوحاه من فكرة اينشتين التي تعتبر ان الموجة تتصرف كجسيم مثل الفوتونات . وعليه ، يمكن وصف انتشار الفوتون في المكان بمعادلات ماكسويل المشتتة على مجال كهربائي  $E(x, y, z, t)$  ومجال مغناطيسي  $B(x, y, z, t)$  . ويعطي مقدار هذه المجالات احتمالية تموضع الفوتون . في المنطقة التي يكون فيها قيم  $E$  و  $B$  كبيرة ، فإن ارجحية *likelihood* تواجد الفوتون تكون كبيرة ايضا. لذلك من المعقول ان تترافق دالة الإحتمال  $P$  مع سعة الموجة  $E$  . ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كما يلي

$$P(x, y, z, t) = |E(x, y, z, t)|^2$$

وبحسب بورن ، تحاكي دالة الموجة  $\psi(x, y, z, t)$  المجال الكهربائي  $E$  ، ويستخدم تفسير اينشتين لإعطاء المعنى الفيزيائي لدالة الموجة المصاحبة للجسيمات المادية . اي ان احتمال ايجاد الجسيم عند نقطة  $(x, y, z)$  في الزمن  $t$  يعطى بالمقدار  $|\psi(x, y, z, t)|^2$  او بالمقدار  $\psi \psi^*$  حيث  $\psi^*$  هي المرافق المركب للدالة  $\psi$  . كما تعطى احتمالية تواجد جسيم ما في عنصر حجمي  $dxdydz$  متمركز حول النقطة  $(x, y, z)$  كما يلي

$$|\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz \quad \text{or} \quad \psi \psi^* dx dy dz$$

وتعرف الكمية  $|\psi(x, y, z, t)|^2$  بالكثافة الإحتمالية *probability density* وتعرف الدالة  $\psi$  بالسعة الإحتمالية *probability amplitude* . بما ان احتمال تواجد الجسيم في اي مكان في الكون يساوي الوحدة ، لذلك نجد ان

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* dx dy dz = 1 \quad \dots(3.3.1)$$

تسمى دالة الموجة التي تحقق معادلة (3.3.1) بالدالة المعيارية *normalized function* .



### (3.4) تفسير دالة الموجة $\psi$ بدلالة احتمالية كثافة تيار

#### *Interpretation of Wave Function in terms of Probability Current Density*

لنفرض ان شعاعا من الجسيمات يتحرك في اتجاه محور  $x$  وان  $\psi$  هي دالة موجة جسيمات في هذا الشعاع . لذلك ، يكون المقدار  $\psi\psi^*$  ممثلا لكثافة احتمال تواجد الجسيم عند النقطة  $x$  . فيما يلي نحاول ايجاد علاقة بين الكثافة الإحتمالية للجسيمات مع إحتمالية كثافة تيار .

نبدا بمعادلة شرودنجر الموجية المعتمدة على الزمن والتي تكون كما يلي

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \quad \dots(3.4.1)$$

نحصل من هذه المعادلة (3.4.1) على التالي

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi + \frac{V}{ih} \psi \quad \dots(3.4.2)$$

يكون المرافق المركب لهذه المعادلة (3.4.2) كما يلي

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{\hbar}{2mi} \nabla^2 \psi^* - \frac{V}{ih} \psi^* \quad \dots(3.4.3)$$

بضرب حدود معادلة (3.4.2) بالمقدار  $\psi$  وحدود المعادلة (3.4.3) بالمقدار  $\psi^*$  ثم إضافة النواتج ، نجد ان

$$\begin{aligned} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2mi} [\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi] \\ \frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2mi} [\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi] \quad \dots(3.4.4) \end{aligned}$$

باستخدام المتطابقة المتجهة التالية

$$\nabla \cdot \phi \mathbf{A} = \nabla \phi \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) &= (\nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \psi^* \nabla^2 \psi) - \\ &(\nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \psi \nabla^2 \psi^*) \\ &= \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^* \quad \dots(3.4.5) \end{aligned}$$

على ضوء معادلة (3.4.5) يمكن كتابة معادلة (3.4.4) كالتالي

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) = \frac{\hbar}{2mi} [\nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) + \nabla \cdot \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0 \quad \dots(3.4.6)$$

تمثل معادلة (3.4.6) معادلة الإستمرارية في الديناميكا الكهربية وهي

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \dots(3.4.7)$$

حيث  $\rho$  كثافة الشحنة ،  $\mathbf{J}$  كثافة التيار .

مقارنة المعادلة (3.4.6) مع معادلة (3.4.7) تسمح لنا بإعتبار ان الكمية  $\psi/\psi^*$  تمثل الكثافة الإحتمالية ، وان الكمية

$$\frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

تمثل إحتمالية كثافة تيار  $\mathbf{J}$  ، حيث  $\mathbf{J}$  تعبر عن معدل احتمال الإنسياب الى الخارج عبر سطح مغلق . كما تكون المكونات الكارتيزية لإحتمالية كثافة تيار كالتالي

$$J_x = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

$$J_y = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right)$$

$$J_z = \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right)$$

كما تكون دالة الموجة لشعاع الجسيمات الحرة المناسبة في اتجاه محور  $x$  كالتالي

$$\psi = A \exp\{-i(Et - p_x x)/\hbar\}$$

$$\psi^* = A^* \exp\{i(Et - p_x x)/\hbar\}$$

وعلية ، تكون إحصائية كثافة التيار كما يلي

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \\ &= \frac{p_x}{m} (\psi^* \psi) \\ &= \frac{p_x}{m} (A^* A) \\ &= v_x |A|^2 \end{aligned}$$

حيث  $J_x$  تمثل فيض الجسيمات ( عدد الجسيمات العابرة لوحدة المساحة في الثانية الواحدة ) . يضع تفسير  $|\psi|^2$  بدلالة إحصائية كثافة التيار شرطا اضافيا على دالة الموجة وهو ان تكون هذه الدالة متصلة ومشتقتها الأولى محددة . وهكذا يتبع ما يلي :

(i) يجب ان تكون  $\psi$  محددة وذات قيمة وحيدة *single valued*

(ii) يجب ان تكون  $\psi$  و  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  متصلة .

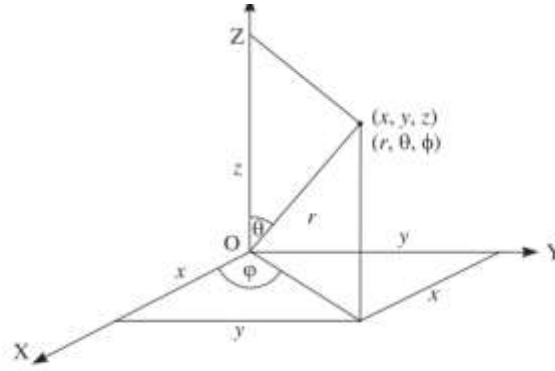
(iii) يجب ان تكون  $\psi$  تكاملية التربيع *square integrable* .

### (3.5) معادلة شرودنجر في الإحداثيات الكروية *Schrodinger Equation in Spherical Coordinates*

تكون الصورة الرياضية لمؤثر لابلاس في الإحداثيات الكروية كما يلي

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad \dots (3.5.1)$$

كما تكون العلاقة بين الإحداثيات الكارتيذية والإحداثيات الكروية كما في الشكل (3.5.1) .



$$\{x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta, r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tan \phi = y/x\}$$

شكل (3.5.1) العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزية والإحداثيات الكروية .

تكون الصيغة الرياضية لمعادلة شرودنجر في الإحداثيات الكروية كالتالي

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad \dots(3.5.2)$$

إذا كانت دالة الموجة تعتمد على متغير واحد هو المسافة الشعاعية  $r$  فإن مؤثر لابلاس الى الصورة التالية

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

كما تؤول معادلة شرودنجر الى صورة بسيطة هي

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi(r) = 0. \quad \dots(3.5.3)$$

### (3.6) المؤثرات في ميكانيكا الكم Operators in Quantum Mechanics

المؤثر هو عبارة عن قاعدة لتحويل دالة ما الى دالة أخرى. وتلعب المؤثرات دورا هاما في ميكانيكا الكم ، اذا كان هناك مؤثرا ما مثل  $\hat{Q}$  ودالة  $f(x)$  فإن فعل هذا المؤثر على تلك الدالة يعبر عنه رياضيا كما يلي

$$\hat{Q}f(x) = \lambda g(x) \quad \dots(3.6.1)$$

حيث  $g(x)$  هي دالة جديدة أخرى و  $\lambda$  هي ثابت . يكون المؤثر خطيا **linear** اذا كان يحقق الشرطين التاليين وهما :

$$\hat{Q}(f_1 + f_2 + \dots) = \hat{Q}f_1 + \hat{Q}f_2 + \dots \quad \dots(3.6.2)$$

$$\hat{Q}(cf) = c\hat{Q}f \quad \dots \dots (3.6.3)$$

حيث  $c$  ثابت مطلق *arbitrary constant*

تسمى الخاصية الفيزيائية الممكن قياسها بالمتغير الديناميكي *dynamical variable* او **الملاحظ observable** : مثل الطاقة ، الزخم ، الزخم الزاوي ، والموقع . في ميكانيكا الكم تمثل هذه الكميات الفيزيائية التي يمكن ادراكها بمؤثر خطي .

### • جبر المؤثرات *Algebra of Operators*

(i) يعرف مجموع وفرق مؤثرين  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$  بالمعادلات التالية

$$(\hat{P} + \hat{Q})f(x) = \hat{P}f(x) + \hat{Q}f(x)$$

$$(\hat{P} - \hat{Q})f(x) = \hat{P}f(x) - \hat{Q}f(x)$$

(ii) يعرف حاصل ضرب المؤثرين  $\hat{P}$ ,  $\hat{Q}$  بالمعادلة التالية

$$\hat{P}\hat{Q}f(x) = \hat{P}[\hat{Q}f(x)]$$

(iii) يكون المؤثران متساويين اذا تحقق ما يلي

$$\hat{P}f(x) = \hat{Q}f(x).$$

(iv) يسمى المؤثر  $\hat{1}$  (الضرب بالعدد واحد) مؤثر الوحدة *unit operator* .

(v) يسمى المؤثر  $\hat{0}$  (الضرب بالعدد صفر) بالمؤثر الصفري *null operator* .

(vi) يعرف تربيع المؤثر كحاصل ضرب المؤثر بنفسه ، او

$$\hat{Q}^2 = \hat{Q}\hat{Q}$$

كما يعرف الأس النوني للمؤثر بأنه ناتج حاصل ضرب هذا المؤثر بنفسه  $n$  مرة على التتابع .

(vii) تخضع المؤثرات لخاصية القانون التجميعي في الضرب ، او

$$\hat{P}(\hat{Q}\hat{R}) = (\hat{P}\hat{Q})\hat{R}$$

يكون الفرق المهم بين جبر المؤثرات وجبر الأعداد هو عدم خضوع جبر المؤثرات للخاصية التبديلية في عملية الضرب ، او  $\hat{P}\hat{Q} \neq \hat{Q}\hat{P}$  .

(viii) يعرف المؤثر المبدل لمؤثرين *commutator operator* كما يلي

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = \hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P}$$

اذا كان  $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P}$  فإن  $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0$  ، وعليه يكون المؤثران  $\hat{P}$  ،  $\hat{Q}$  تبادليين .

• مؤثرات المتغيرات الديناميكية *operators of some dynamical variables*

تكون دالة الموجة لجسيم حر يتحرك في الفضاء كما يلي

$$\psi(x, y, z, t) = A \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} (Et - p_x x - p_y y - p_z z) \right\} \quad \dots(3.6.4)$$

كما تكون المشتقات الجزئية لدالة الموجة بالنسبة للمتغيرات الإحداثية الكارتيزية كالتالي

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p_x \psi \quad \text{or} \quad -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_x \psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y} = p_y \psi$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial z} = p_z \psi \quad \dots(3.6.5)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$$

بنظرة سريعة للمعادلات (3.6.5) ، نجد ان علاقة المتغيرات الديناميكية مع المؤثرات التفاضلية يمكن التعبير عنها كما في الجدول (3.6.1)

Dynamical Variables	Operators
$p_x$	$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
$p_y$	$\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$
$p_z$	$\hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$
$p$	$\hat{p} = -i\hbar \nabla$
$E$	$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
Kinetic energy $T = \frac{p^2}{2m}$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$

جدول (3.6.1) مؤثرات المتغيرات الديناميكية .

كما تكون دالة هاملتون ( الطاقة الكلية ) لنظام ميكانيكي كالتالي

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

ويكون المؤثر المقابل لهذه الدالة كما يلي

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \quad \dots(3.6.6)$$

للنظام المحافظ تمثل الطاقة الكلية بدالة الهاملتون  $H$  التي يعبر عنها بإحداثيات الموقع والزخوم المرافقة. وعليه ، يكون مؤثر هاملتون كما في معادلة (3.6.6) وليس بالمؤثر  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  لأن الزمن يكون غير ملاحظا ، هكذا يوجد مؤثر زمني .

على ضوء معادلة (3.6.6) ، يمكن كتابة معادلة شرودنجر بدلالة مؤثر هاملتون كما يلي

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

او

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة القيم الذاتية ( الخاصة ) Eigen value equation .

• مؤثر الزخم الزاوي *Angular momentum operator*

في الميكانيكا الكلاسيكية يكون الزخم الزاوي لجسيم ما كما يلي

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

بنشر هذه المصفوفة نجد ان المكونات الكارتيزية للزخم الزاوي كما يلي

$$L_x = yp_z - zp_y, L_y = zp_x - xp_z, L_z = xp_y - yp_x$$

وتكون المؤثرات المقابلة لهذه المتغيرات على النحو التالي

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \dots(3.6.7)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \dots(3.6.8)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \dots(3.6.9)$$

في معادلة (3.6.7) نلاحظ التماثل في التعبير الرياضي للمؤثر  $\hat{L}_x$ . وباستخدام عملية التبديل التداويري بين الإحداثيات  $x, y, z$  نحصل على الصيغ الرياضية للمؤثرات  $\hat{L}_y, \hat{L}_z$ .

في حالة المسائل ذات التماثل الكروي، يكون من المستحسن ان نعبر عن هذه المؤثرات بدلالة الإحداثيات الكروية، التي هي معرفة كما في الشكل (3.5.1). وتتلخص العلاقات بين الإحداثيات الكارتيزية والكروية كما يلي



$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad \dots(3.6.10)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad \dots(3.6.11)$$

$$z = r \cos \theta \quad \dots(3.6.12)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \dots(3.6.13)$$

$$\tan \varphi = y/x \quad \dots(3.6.14)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{x^2 + y^2}{z^2} \quad \dots(3.6.15)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \dots(3.6.16)$$

من معادلة (3.6.13) ، نجد ان

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \varphi \quad \dots(3.6.17)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \varphi \quad \dots(3.6.18)$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \theta \quad \dots(3.6.19)$$

بمفاضلة معادلة (3.6.15) بالنسبة للمتغير  $x$  ، نحصل على

$$\sec^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}$$

إذا

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \quad \dots(3.6.21)$$

بالمثل ،

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

بإشتقاق معادلة (3.6.14) بالنسبة للمتغير  $x$  ، نجد ان

$$\sec^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}$$

إذا

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \quad \dots(3.6.21)$$

بالمثل ،

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos^2 \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

الآن

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \end{aligned}$$

إذا

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \dots(3.6.22)$$

بالمثل ، نجد ان

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \dots(3.6.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \dots(3.6.24)$$

باستخدام النتائج السابقة يمكن كتابة المؤثرات المقابلة لمركبات الزخم الزاوي الكارتيزية كالتالي

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \left[ r \sin \theta \cos \varphi \left\{ \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} - \right. \\ \left. r \sin \theta \sin \varphi \left\{ \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \right] \\ = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \dots(3.6.25)$$

بالمثل ،

$$\hat{L}_x = i\hbar \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad \dots(3.6.26)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad \dots(3.6.27)$$

باستخدام التعريفات التالية :

$$\hat{L}_x^2 = \hat{L}_x \hat{L}_x \quad \text{and} \quad \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

نجد ان

$$\hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad \dots(3.6.28)$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad \dots(3.6.29)$$

### (3.7) معادلة القيمة الذاتية Eigen Value Equation

عموما ، تمثل كل كمية فيزيائية بمؤثر خطي ويمكن انشاء لكل مؤثر معادلة من النوع التالي

$$\hat{Q} u_q = q u_q \quad \dots(3.7.1)$$

اي يكون نتيجة هذا المؤثر عبارة عن حاصل ضرب الدالة  $u_q$  بعامل ثابت  $q$  . تسمى معادلة (3.7.1) **بمعادلة القيم الذاتية Eigen value equation** . كما تكون حلول هذه المعادلة محققة لمجموعة من الشروط لقيم مختارة من المعامل  $q$  parameter . وتسمى هذه القيم الخاصة لهذا المعامل بالقيم الذاتية ( المميزة) للمؤثر  $\hat{Q}$  ، كما تسمى الدالة  $u_q$  التي تحقق صحة هذه المعادلة **بالدوال الذاتية Eigen functions** للمؤثر .

عندما يكون النظام في الحالة الذاتية  $u_q$  للمؤثر  $\hat{Q}$  ، فإن المتغير الديناميكي  $Q$  يملك قيمة محددة تساوي القيمة الذاتية  $q$  . اي ، يكون الخطأ في قياس  $Q$  صفرا اذا تواجد النظام في اي من حالات  $\hat{Q}$  الذاتية ويقال ان الكمية الفيزيائية مكممة  $quantized$  . ويكون معنى معادلة (3.7.1) كما يلي : اذا كان النظام في الحالة الذاتية  $u_q$  فإن قياس الكمية  $Q$  يعطي فقط عدد واحد من  $q$  . تشكل مجموعة كل القيم الذاتية للمؤثر  $\hat{Q}$  طيفا  $spectrum$  يعرف بطيف القيم الذاتية ، وقد يكون هذا الطيف متصلا او منفصلا بشكل كلي او جزئي . اذا كان يوجد دالة ذاتية واحدة فقط تنتمي لقيمة ذاتية معينة ، تكون هذه القيمة الذاتية **غير منحلة non-degenerate** . بينما اذا وجد عدة دوال ذاتية تنتمي لقيمة ذاتية مفردة ، تكون هذه القيمة الذاتية **منحلة degenerate** .

رياضيا ، اذا كانت الدوال  $u_q$  ،  $v_q$  تنتمي لنفس القيمة الذاتية  $q$  فإن الترابط الخطي :  $c_1 u_q + c_2 v_q$  لكل قيم الثوابت  $c_1$  ،  $c_2$  يكون دالة ذاتية تنتمي لنفس القيمة الذاتية . اي ،

$$\hat{Q}(c_1 u_q + c_2 v_q) = c_1 \hat{Q} u_q + c_2 \hat{Q} v_q = q(c_1 u_q + c_2 v_q) \quad \dots(3.7.2)$$

هكذا تقابل القيمة الذاتية المنحلة عدد غير محدد من الدوال الذاتية ، ويشكل الكل من هذه الدوال الذاتية المنتمية للقيمة الذاتية المنحلة ما يعرف بالفضاء الخطي  $linear-space$  . تكون مجموعة كل الدوال الذاتية المنتمية لقيمة ذاتية معينة مغلقة عند اعتبار الترابط الخطي . هذا يؤكد ان اي ترابط خطي بين اعضاء هذه المجموعة يكون عضوا فيها ايضا . ولكن ليس كل الأعضاء في هذه المجموعة تكون مستقلة خطيا . من اعضاء مجموعة الدوال الذاتية ، يمكن اختيار مجموعة جزئية subset من الدوال الذاتية المستقلة خطيا ، لنقل ان  $u_{q1}, u_{q2}, \dots, u_{qr}$  بحيث ان اي دالة ذاتية تنتمي للقيمة الذاتية  $q$  يمكن التعبير عنها كترابط خطي وحيد من النوع التالي:

$(c_1 u_{q1} + c_2 u_{q2} + \dots + c_r u_{qr})$  بمعاملات مناسبة  $c_1, c_2, \dots, c_r$  . وعليه ، يقال ان مجموعة الدوال المستقلة  $u_{q1}, u_{q2}, \dots, u_{qr}$  تغطي  $span$  هذا الفضاء الخطي ، وان مجموعة هذه الدوال تشكل الدوال الأساسية لهذا الفضاء . ويكون العدد  $r$  مميزا للفضاء . هذا يعني ان من بين العدد غير المحدود من الدوال الذاتية المنتمية لقيمة ذاتية منحلة يوجد عدد محدد

، مثل  $r$  ، من الدوال المستقلة خطيا . يسمى العدد  $r$  درجة الإنحلال *degree of degeneracy* ، ويقال ان الدالة الذاتية منحلة بثنيات (طويات) رائية *r-fold degenerate* .

إذا كان النظام في حالة مطلقة  $\psi$  واجري القياس للكمية الفيزيائية  $Q$  في عدد كبير من الأنظمة المتماثلة ( لها نفس الحالة ) فإن النتيجة لا تكون ثابتة بل تقع ضمن مدى من القيم التي متوسطها ( القيمة المتوقعة ) يعطى كالتالي

$$\langle q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi d\tau \quad \dots(3.7.3)$$

حيث تكون الدالة  $\psi$  دالة موجية معيارية *normalized wave function* .

يمكن توضيح ذلك بالمثال التالي

تكون معادلة القيم الذاتية للجسيم الحر كما يلي :

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi &= E\psi \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= E\psi \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi &= 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \end{aligned} \quad \dots(3.7.4)$$

تكون الحلول المستقلة خطيا لمعادلة (3.7.4) كما يلي :

$$\psi_1 = e^{ikx}, \quad \psi_2 = e^{-ikx}$$

وعليه ، تكون القيمة الذاتية  $E$  **منحلة بطيتين** two-fold ، كما تمثل  $\psi_1$  و  $\psi_2$  الدوال الأساسية . كما يكون الترابط الخطي لهذه الدوال دوال ذاتية للمؤثر  $\hat{H}$  . حيث

$$\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = \cos kx, \quad \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \sin kx.$$

### (3.8) الخاصية التعامدية للدوال الذاتية Orthogonality of Eigen Functions

تكون الدالتان الذاتيتان  $\psi_m, \psi_n$  والمنتميتان لقيمتين ذاتيتين مختلفتين  $\epsilon_m, \epsilon_n$  متعامدتين اذا كانتا تحققان العلاقة التالية

$$\int \psi_m^* \psi_n d\tau = 0 \quad \dots(3.8.1)$$

فيما يلي سنبرهن ان الدوال الذاتية لمؤثر هاملتون تكون متعامدة .

نعتبر معادلة شرودنجر الموجية المستقلة زمانيا :  $\hat{H}\psi = \epsilon\psi$  . وتؤول هذه المعادلة للحالة  $\psi_m$  في حالة البعد الواحد ( في اتجاه محور  $x$  ) الى الصورة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2\psi_m}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon_m - V)\psi_m = 0 \quad \dots(3.8.2)$$

و تكون المعادلة المرافقة المركبة لهذه المعادلة على النحو التالي

$$\frac{d^2\psi_m^*}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon_m - V)\psi_m^* = 0 \quad \dots(3.8.3)$$

وبالمثل للحالة  $\psi_n$  ، تكون معادلة شرودنجر كما يلي

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon_n - V)\psi_n = 0 \quad \dots(3.8.4)$$

بضرب معادلة (3.8.3) بالدالة  $\psi_n$  والمعادلة (3.8.4) بالدالة  $\psi_m$  وطرح المعادلات الناتجة و ثم اخذ التكامل للمعادلة الجديدة ، نحصل على التالي

$$\int \left[ \psi_m^* \frac{d^2\psi_n}{dx^2} - \psi_n \frac{d^2\psi_m^*}{dx^2} \right] dx + \frac{2m}{\hbar^2}(\epsilon_n - \epsilon_m) \int \psi_m^* \psi_n dx = 0$$

نلاحظ ان المقدار بداخل القوس [ ] يمثل المشتقة الاولى للكمية  $\{\psi_m d\psi_n/dx - \psi_n d\psi_m^*/dx\}$  بالنسبة للمتغير  $x$  . وعليه ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[ \psi_m^* \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m^*}{dx} \right] dx = \frac{2m}{\hbar^2} (\epsilon_m - \epsilon_n) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx$$

$$\left[ \psi_m^* \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m^*}{dx} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2m}{\hbar^2} (\epsilon_m - \epsilon_n) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx$$

حيث ان دالة الموجة ذات السلوك الحسن *well-behaved wave function* ومشتقتها يجب ان تتلاشى عندما  $x \rightarrow \pm\infty$  ، لذلك يتلاشى الطرف الأيسر في هذه المعادلة عند الحدود وتصبح نتيجة التعويض في هذه المعادلة كما يلي

$$(\epsilon_m - \epsilon_n) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = 0$$

بما ان  $\epsilon_m \neq \epsilon_n$  ، نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = 0 \quad \dots(3.8.5)$$

وهكذا تكون الدالة الذاتية المنتمية لقيم ذاتية مختلفة متعامدة .

ويكون شرط المعايرة لدالة الموجة  $\psi(x)$  كما يلي

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad \dots(3.8.6)$$

يمكن التعبير عن خصائص دالة الموجة المبينة في المعادلات (3.8.5) – (3.8.6) بمعادلة واحدة كالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n d\tau = \delta_{mn} \quad \dots(3.8.7)$$

حيث:  $\delta_{mn}$  تسمى **دلتا كرونكر** *Kronecker delta* والتي لها الخواص التالية :

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= 0 \text{ for } m \neq n \\ &= 1 \text{ for } m = n \end{aligned}$$

### (3.9) المشاهدات المتوافقة وغير المتوافقة *Compatible and Incompatible Observables*

إذا كان من المستطاع قياس مشاهدين في آن واحد وبدون ان تؤثر احدهما على الأخرى فإنه يقال ان هاتين المشاهدين متوافقتان ، ويكون مؤثراتهما تبادليين *commute* ، اي  $0 = [\hat{P}, \hat{Q}]$  . من جهة اخرى ، اذا كانت المشاهدتان بحيث قياس احدهما يحدث خطأ في قياس الآخر فإن هذين المشاهدين تكونان غير متوافقتين ، بمعنى ان  $[\hat{P}, \hat{Q}] \neq 0$  .

لنفرض ان  $R, Q$  تمثلان كميتان فيزيائتان والممكن تعريف قيمتيهما آنيا عندما يكون النظام في حالة مشتركة  $\psi_n$  . وهذه الدالة الموجية  $\psi_n$  ، التي يكون للكمية  $Q$  مقدار  $q_n$  وللكمية  $R$  مقدار  $r_n$  ، يجب ان تحقق المعادلتين الآتيتين التاليتين

$$\hat{Q}\psi_n = q_n\psi_n \quad \dots(3.9.1)$$

$$\hat{R}\psi_n = r_n\psi_n \quad \dots(3.9.2)$$

كما يتم تحديد حاصل ضرب المؤثرين بواسطة الشرط التالي

$$\Pi\psi_n = (\hat{Q}\hat{R})\psi_n = \hat{Q}(\hat{R}\psi_n) = q_n r_n \psi_n \quad \dots(3.9.3)$$

باستخدام المعادلتين (3.9.1) و (3.9.2) ، نجد ان

$$(\hat{R}\hat{Q})\psi_n = \hat{R}(\hat{Q}\psi_n) = \hat{R}(q_n\psi_n) = r_n q_n \psi_n \quad \dots(3.9.4)$$

من المعادلتين (3.9.3) و (3.9.4) ، نجد ان

$$\Pi = \hat{Q}\hat{R} = \hat{R}\hat{Q} \quad \dots(3.9.5)$$

$$\hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q} = 0. \quad \dots(3.9.6)$$

وعليه ، اذا كان لكميتين في آن واحد قيم معرفة فإن

(i) يكون لمؤثريهما دالة ذاتية مشتركة (ii) ويكون هذان المؤثران تبادليين *commute* .

بشكل عام ، يمكن اثبات ان حاصل ضرب مؤثرين لا تبادليين ، اي  $\hat{Q}\hat{R} \neq \hat{R}\hat{Q}$  ، كما يلي  
لنفرض ان



$$\hat{Q} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{and} \quad \hat{R} = x$$

$$(\hat{Q}\hat{R})\psi = \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = x\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi$$

$$(\hat{R}\hat{Q})\psi = x\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

كما يسمى المؤثرين  $\hat{Q}$ ,  $\hat{R}$  والتي تحقق الشرط  $\hat{Q}\hat{R} = \hat{R}\hat{Q}$  مؤثرات تبديلية *commutative operators* ، اما اذا كانت المؤثرات غير محققة لهذا الشرط فتسمى بمؤثرات غير تبديلية *non-commutative* . كما تسمى المؤثرات المحققة للشرط التالي :  $\hat{Q}\hat{R} = -\hat{R}\hat{Q}$  بمؤثرات تبديلية مضادة *anti-commutative operators* .

### (3.10) المتبادل Commutator

يسمى المؤثر  $\hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q}$  الذي يتشكل من المؤثرين  $\hat{Q}$ ,  $\hat{R}$  متبادل المؤثرين المعطيين ويشار اليه بالرمز  $[\hat{Q}, \hat{R}]$  ، اي

$$[\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q} \quad \dots(3.10.1)$$

وعليه ، يكون متبادل المؤثرين التبادليين مساويا للصفر .

#### • العلاقات التبديلية *commutation relation*

تخصص المؤثرات الخطية للقواعد التبديلية التالية :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$$

فيما يلي نستعرض بعض العلاقات التبادلية للمؤثرات في الميكانيكا الكم :

$$1. [\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{y}, \hat{z}] = [\hat{z}, \hat{x}] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = \hat{x}\hat{y} - \hat{y}\hat{x} = xy - yx = 0$$

$$2. [\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})\psi = -i\hbar \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial(x\psi)}{\partial x} \right)$$

$$= -i\hbar \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = i\hbar \psi$$

$$3. [\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_z] = [\hat{z}, \hat{p}_x] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y]\psi = (\hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{x})\psi = -i\hbar \left( x \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial(x\psi)}{\partial y} \right)$$

$$= -i\hbar \left( x \frac{\partial \psi}{\partial y} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

$$4. [\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_z] = [\hat{p}_z, \hat{p}_x] = 0$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y]\psi = (\hat{p}_x\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{p}_x)\psi = (-i\hbar)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

5.  $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$

$$\begin{aligned}
 [\hat{H}, \hat{p}]\psi &= (\hat{H}\hat{p} - \hat{p}\hat{H})\psi \\
 &= \left\{ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) + i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \right\} \psi \\
 &= i \frac{\hbar^3}{2m} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) = 0
 \end{aligned}$$

6.  $[\hat{L}_x, \hat{x}] = 0, [\hat{L}_y, \hat{y}] = 0, [\hat{L}_z, \hat{z}] = 0$

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_x, \hat{x}]\psi &= (\hat{L}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{L}_x)\psi = -i\hbar \left\{ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) x\psi - x \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \right\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

7.  $[\hat{L}_x, \hat{y}] = i\hbar z, [\hat{L}_y, \hat{z}] = i\hbar x, [\hat{L}_z, \hat{x}] = i\hbar y$

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_x, \hat{y}]\psi &= (\hat{L}_x \hat{y} - \hat{y} \hat{L}_x)\psi \\
 &= -i\hbar \left\{ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) (y\psi) - y \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \right\} \\
 &= -i\hbar \left\{ y^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} - zy \frac{\partial \psi}{\partial y} - z\psi - y^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + yz \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \\
 &= i\hbar z\psi
 \end{aligned}$$

$$8. [\hat{L}_x, \hat{p}_x] = 0.$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{p}_x]\psi &= (\hat{L}_x \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{L}_x)\psi \\ &= (-i\hbar)^2 \left\{ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

كما تكون هذه العلاقة صحيحة لمركبات المؤثرات المتبادلة والمتشابهة في الدليل ، اي  $[\hat{L}_y, \hat{p}_y] = 0$  ، وهكذا.

$$9. [\hat{L}_x, \hat{p}_y] = i\hbar \hat{p}_z$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{p}_y]\psi &= (\hat{L}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{L}_x)\psi \\ &= (-i\hbar)^2 \left\{ \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right\} \\ &= (-i\hbar)^2 \left\{ y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} \\ &= (-i\hbar)^2 \left( -\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ &= i\hbar \left( -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ &= i\hbar \hat{p}_z \psi. \end{aligned}$$

كما تكون العلاقة (9) صحيحة لمركبات المؤثرات الأخرى .

$$10. [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x = \hat{L}_x (\hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z) - (\hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_z) \hat{L}_x \\ &= \hat{L}_x \hat{z} \hat{p}_x - \hat{L}_x \hat{x} \hat{p}_z - \hat{z} \hat{p}_x \hat{L}_x + \hat{x} \hat{p}_z \hat{L}_x \end{aligned}$$

بما ان  $\hat{L}_x$  يتبدل مع كلا من  $\hat{x}$  و  $\hat{p}_x$  ، لذلك يمكن تغيير ترتيب المؤثرات  $\hat{L}_x$  و  $\hat{x}$  في الحد الثاني وأيضا المؤثرات  $\hat{L}_x$  و  $\hat{p}_x$  في الحد الثالث في العلاقة رقم (10) ، وتكون النتيجة كالتالي

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x \hat{z} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{L}_x \hat{p}_z - \hat{z} \hat{L}_x \hat{p}_x + \hat{x} \hat{p}_z \hat{L}_x$$

في هذه العلاقة، يمكن ربط الحد الأول مع الحد الثالث وكذلك ربط الحدين الثاني والحد الرابع لنحصل على التالي

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= (\hat{L}_x \hat{z} - \hat{z} \hat{L}_x) \hat{p}_x - \hat{x} (\hat{L}_x \hat{p}_z - \hat{p}_z \hat{L}_x) \\ &= (i\hbar y) \hat{p}_x - \hat{x} (i\hbar \hat{p}_y) \\ &= i\hbar (\hat{y} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_y) \\ &= i\hbar \hat{L}_z \end{aligned}$$

بإجراء التحويلات التبديلية المتعاقبة على المركبات الأخرى ، نجد ان  $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$  ، وهكذا.....

$$11. [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0, [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0, [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_x] &= (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2) \hat{L}_x - \hat{L}_x (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2) \\ &= \hat{L}_x^3 + \hat{L}_y^2 \hat{L}_x + \hat{L}_z^2 \hat{L}_x - \hat{L}_x^3 - \hat{L}_x \hat{L}_y^2 - \hat{L}_x \hat{L}_z^2 \end{aligned}$$

باستخدام العلاقة التبديلية التالية

$$\hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \hat{L}_x = i\hbar \hat{L}_z$$

يمكن تحويل الحد الثاني والحد الخامس في الطرف الأيمن من العلاقة (11) كما يلي

$$\begin{aligned} \hat{L}_y^2 \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y^2 &= \hat{L}_y \hat{L}_y \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y \hat{L}_y \\ &= \hat{L}_y (\hat{L}_x \hat{L}_y - i\hbar \hat{L}_z) - (\hat{L}_y \hat{L}_x + i\hbar \hat{L}_z) \hat{L}_y \\ &= -i\hbar (\hat{L}_y \hat{L}_z + \hat{L}_z \hat{L}_y) \end{aligned}$$

باستخدام العلاقة التالية

$$\hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z = i\hbar \hat{L}_y$$

يمكن عمل تحويل مشابه للحدين الثالث والسادس :

$$\begin{aligned} \hat{L}_z^2 \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z^2 &= \hat{L}_z \hat{L}_z \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_z \hat{L}_z \\ &= \hat{L}_z (\hat{L}_x \hat{L}_z + i\hbar \hat{L}_y) - (\hat{L}_z \hat{L}_x - i\hbar \hat{L}_y) \hat{L}_z \\ &= i\hbar (\hat{L}_z \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_z) \end{aligned}$$

باستخدام هذه التحويلات ، نحصل على التالي

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0$$

كما سبق ، نستنتج ان مربع المتجه  $\mathbf{L}$  و احد مساقطه على احد المحاور الإحداثية يمكن تحديده أنيا . بينما لا يمكن تحديد المسقطين الآخرين إلا في حالة كون كل المركبات مساوية للصفر .

**Relation for Ladder Operators** (3.11) العلاقات التبديلية للمؤثرات الدرجية :

### Commutation

يرمز للمؤثرات الدرجية ladder operators بالرموز التالية:  $\hat{L}_-, \hat{L}_+$  وتعرف رياضيا كما يلي

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \quad \dots(3.11.1)$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y \quad \dots(3.11.2)$$

واحيانا تسمى هذه المؤثرات بالمؤثرات الرافعة والخافضة *raising and lowering operators* :  
 $\hat{L}_-, \hat{L}_+$  على الترتيب . كما يرمز للمؤثر الملاصق adjoint operator للمؤثر الرافع ( $\hat{L}_+$ ) بالرمز  $\hat{L}_+^\dagger$  ، كما يرمز للمؤثر الملاصق للمؤثر الخافض ( $\hat{L}_-$ ) بالرمز  $\hat{L}_-^\dagger$  وتكون هذه المؤثرات كالتالي:

$$\hat{L}_+^\dagger = \hat{L}_-, \hat{L}_-^\dagger = \hat{L}_+ \quad \dots(3.11.3)$$

تكون العلاقات التبديلية للمؤثرات الرافعة والخافضة كما يلي

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_+] = \hbar \hat{L}_+, [\hat{L}_z, \hat{L}_-] = -\hbar \hat{L}_-, [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z, [\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0 \quad \dots(3.11.4)$$

ويمكن اثبات هذه العلاقات كما يلي

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}_+] &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x + i\hat{L}_y] = [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + i[\hat{L}_z, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_y + \hbar\hat{L}_x \\ &= \hbar(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) = \hbar\hat{L}_+ \end{aligned} \quad \dots(3.11.5)$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}_-] &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x - i\hat{L}_y] = [\hat{L}_z, \hat{L}_x] - i[\hat{L}_z, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_y - \hbar\hat{L}_x \\ &= -\hbar(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) = -\hbar\hat{L}_- \end{aligned} \quad \dots(3.11.6)$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}_+, \hat{L}_-] &= [\hat{L}_x + i\hat{L}_y, \hat{L}_x - i\hat{L}_y] \\ &= (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) - (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) \\ &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x) - \{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x)\} \\ &= -2i(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x) \\ &= -2i[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = 2\hbar\hat{L}_z \end{aligned} \quad \dots(3.11.7)$$

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_+] &= [\hat{L}^2, \hat{L}_x + i\hat{L}_y] = \hat{L}^2(\hat{L}_x + i\hat{L}_y) - (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)\hat{L}^2 \\ &= \hat{L}^2\hat{L}_x + i\hat{L}^2\hat{L}_y - \hat{L}_x\hat{L}^2 - i\hat{L}_y\hat{L}^2 \\ &= \hat{L}^2\hat{L}_x - \hat{L}_x\hat{L}^2 + i(\hat{L}^2\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}^2) \\ &= [\hat{L}^2, \hat{L}_x] + i[\hat{L}^2, \hat{L}_y] = 0 \end{aligned} \quad \dots(3.11.8)$$

وبالمثل ، يمكن اثبات العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} [\hat{L}^2, \hat{L}_-] &= 0 \quad \dots(3.11.9) \\ \hat{L}_+\hat{L}_- &= (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x) \\ &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z \end{aligned}$$

بالمثل ،

$$\hat{L}_- \hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z$$

وبالتالي

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_- \hat{L}_+) + \hat{L}_z^2 \quad \dots(3.11.10)$$

ويعبر عن المؤثرات الدرجية في الإحداثيات الكروية كما يلي :

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ &= \hat{L}_x + i\hat{L}_y \\ &= i\hbar \left( \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) - \hbar \left( -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\varphi \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \\ &= \hbar e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad \dots(3.11.11) \end{aligned}$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hbar e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad \dots(3.11.12)$$

### (3.12) القيمة المتوقعة Expectation value

عندما لا تكون دالة موجة النظام  $\Psi$  هي دالة ذاتية للمؤثر  $\hat{Q}$  الذي يمثل الكمية المشاهدة  $Q$  في هذا النظام فإن قياس  $Q$  في الأنظمة المتماثلة سوف يعطي قيما احتمالية مختلفة . وتمون القيمة المتوقعة للكمية المشاهدة  $Q$  تساوي متوسط القيم الناتجة من هذه القياسات .

رياضيا ، تعرف القيمة المتوقعة لكمية فيزيائية مثل  $Q$  الممثلة بالمؤثر  $\hat{Q}$  كما يلي

$$\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi d\tau \quad \dots(3.12.1)$$

حيث  $\Psi$  هي حالة النظام system state . اذا كانت دالة الموجة غير معايرة فإن القيمة المتوقعة تكون كما يلي



$$\langle Q \rangle = \frac{\int \psi^* \hat{Q} \psi d\tau}{\int \psi^* \psi d\tau} \quad \dots(3.12.2)$$

فيما يلي نستعرض القيم المتوقعة للكميات الفيزيائية :  $x, p_x, p, E$  بالنسبة لحالة النظام  $\Psi$  والتي يمكن حسابها باستخدام المعادلة (3.12.1)

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi d\tau$$

$$\langle p_x \rangle = \int \psi^* \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi d\tau$$

$$\langle p \rangle = \int \psi^* (-i\hbar \nabla) \psi d\tau$$

$$\langle E \rangle = \int \psi^* \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi d\tau$$

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \int \psi^* \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi d\tau$$

$$\langle V \rangle = \int \psi^* V \psi d\tau$$

حيث

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle + \langle V \rangle \text{ we have}$$

$$\langle E \rangle = \int \psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi d\tau + \int \psi^* V \psi d\tau.$$

### (3.13) نظرية إيرنفست EHRENFEST THEORM

تنص هذه النظرية على ان معادلات الحركة الكلاسيكية :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

تكون صالحة في الميكانيكا الكمية اذا استبدلنا الكمية الفيزيائية بقيمتها المتوقعة . وهكذا تكون معادلات الحركة الكمية كما يلي

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{\langle p_x \rangle}{m} \quad \dots(3.13.1)$$

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

البرهان

تكون المشتقة الزمنية للقيمة المتوقعة لإحداثي الموقع كما يلي

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \frac{d}{dt} \int \psi^* x \psi d\tau \\ &= \int \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial t} d\tau + \int \frac{\partial \psi^*}{\partial t} x \psi d\tau \end{aligned} \quad \dots(3.13.2)$$

بما ان كل التغيرات في  $x$  تحدد بالتغير في دالة الموجة  $\Psi$  ، لذلك لا يوجد حد مثل  $\frac{\partial x}{\partial t}$  في معادلة (3.13.2) . فيما يلي نستعرض كيفية عمل ميكانيكا شرودنجر .

بتعويض قيم  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  ،  $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$  الناتجة من معادلة شرودنجر في المعادلات (3.13.2) نحصل على التالي

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle x \rangle &= \int \psi^* x \frac{1}{i\hbar} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi \right) + \int -\frac{1}{i\hbar} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V\psi^* \right) x\psi d\tau \\
&= \frac{1}{i\hbar} \int \frac{-\hbar^2}{2m} (\psi^* x \nabla^2 \psi - \nabla^2 \psi^* x \psi) d\tau \\
&= \frac{i\hbar}{2m} \int [\psi^* x \nabla^2 \psi - (\nabla^2 \psi^*)(x\psi)] d\tau \\
&= \frac{i\hbar}{2m} \int \psi^* x \nabla^2 \psi d\tau - I \quad \dots(3.13.3)
\end{aligned}$$

حيث

$$I = \frac{i\hbar}{2m} \int (\nabla^2 \psi^*)(x\psi) d\tau \quad \dots(3.13.4)$$

باستعمال المتطابقة

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

يمكن كتابة ما يلي

$$\nabla \cdot (x\psi \nabla \psi^*) = \nabla x\psi \cdot \nabla \psi^* + x\psi \nabla^2 \psi^* \quad \dots(a)$$

بتعديل مواقع الدوال  $x\psi, \psi^*$  في هذه العلاقة ، نجد ان

$$\nabla \cdot (\psi^* \nabla x\psi) = \nabla \psi^* \cdot \nabla (x\psi) + \psi^* \nabla^2 (x\psi) \quad \dots(b)$$

باستخدام العلاقة (a) ، نجد ان معادلة (3.13.4) تؤول الى

$$\begin{aligned}
I &= \frac{i\hbar}{2m} \int \left\{ \nabla \cdot (x\psi \nabla \psi^*) - \nabla x\psi \cdot \nabla \psi^* \right\} d\tau \\
&= \frac{i\hbar}{2m} \left\{ \int (x\psi \nabla \psi^*) \cdot ds - \int \nabla x\psi \cdot \nabla \psi^* d\tau \right\}
\end{aligned}$$

حيث استخدمت نظرية التباعد لتحويل التكامل الحجمي الى تكامل سطحي. رياضيا ، يتلاشى التكامل السطحي اذا  $\psi \rightarrow 0$  عندما  $x \rightarrow \infty$  . وعليه

$$I = \frac{i\hbar}{2m} \int (-\nabla x \psi \cdot \nabla \psi^*) d\tau$$

باستعمال العلاقة (b) ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} I &= \frac{i\hbar}{2m} \int [\psi^* \nabla^2 (x\psi) - \nabla \cdot (\psi^* \nabla x \psi)] d\tau \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int \psi^* \nabla^2 (x\psi) d\tau - \frac{i\hbar}{2m} \int \psi^* \nabla (x\psi) \cdot ds \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int \psi^* \nabla^2 (x\psi) d\tau + 0 \quad (\text{The surface integral again vanishes}) \end{aligned}$$

كما تصبح معادلة (3.13.3) كالتالي

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \frac{i\hbar}{2m} \int [\psi^* x \nabla^2 \psi - \psi^* \nabla^2 x \psi] d\tau \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int \psi^* \left( x \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^2} (x\psi) \right) d\tau \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int \psi^* \left( x \frac{d^2 \psi}{dx^2} - x \frac{d^2 \psi}{dx^2} - 2 \frac{d\psi}{dx} \right) d\tau \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int \psi^* \left( -2 \frac{d\psi}{dx} \right) d\tau \\ &= \frac{1}{m} \int \psi^* \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi d\tau \\ &= \frac{1}{m} \langle p_x \rangle \end{aligned}$$

وبالمثل ،

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle p_x \rangle &= \frac{d}{dt} \int \psi^* \left( -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\tau \\ &= -i\hbar \int \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\tau\end{aligned}$$

بتعويض قيم  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  ،  $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$  الناتجة من معادلة شرودنجر، نحصل على

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle p_x \rangle &= \frac{\hbar^2}{2m} \int \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \nabla^2 \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\tau - \int \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial x} (V\psi) - V\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\tau \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi \right) d\tau - \\ &\quad \int \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial x} (V\psi) - V\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\tau \\ &= - \int \psi^* \left( \frac{\partial}{\partial x} (V\psi) - V \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\tau \\ &= \int \psi^* \left( -\frac{\partial V}{\partial x} \right) \psi d\tau \\ &= \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle\end{aligned}$$

### (3.14) تركيب الحالات ( نظرية التمدد ) *Superposition of States ( Expansion Theorem )*

تمثل اي كمية فيزيائية بمؤثر خطي ( هيرميتي *Hermitian* ) ويكون لكل مؤثر معادلة قيمة ذاتية من النوع التالي

$$\hat{Q}\phi_m = q_m \phi_m \quad \dots(3.14.1)$$

حيث  $q_m$  هي القيمة الذاتية و  $\phi_m$  هي الدالة الذاتية للمؤثر  $\hat{Q}$  الممثل للكمية الفيزيائية  $Q$ . وقد تكون هذه القيم الذاتية بشكل طيف متقطع *discrete* او بشكل طيف متصل *continuous* او كليهما . في حالة الطيف المنقطع ، يمكن ان نشير الى القيم الذاتية والدوال الذاتية كما يلي

$$\begin{array}{cccccccc} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \dots & q_m & \dots & \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \dots & \varphi_m & \dots & \end{array}$$

من الخاصية المهم لهذه الدوال الذاتية هي انها تشكل مجموعة كاملة *complete set* . وهذا يتضمن ان اي دالة موجية مطلقة لحالة النظام  $\Psi$  ، التي تخضع لنفس الشروط الحدودية كدوال ذاتية ، يمكن ان تنشر كتراكيب ( تركيب) خطي لدوال ذاتية  $\varphi_q$  . كما ان تركيب هذه الدوال الذاتية تمثل حالة ممكنة للنظام ايضا . في حالة الطيف المتقطع للقيم الذاتية ، تسمح هذه الخاصية للدوال الذاتية بان نكتب ما يلي

$$\psi = \sum_m c_m \varphi_{qm} \quad \dots(3.14.2)$$

حيث  $c_m$  معاملات ثابتة ، في العموم تكون هذه المعاملات مركبة *complex* . على سبيل المثال ، تكون الدوال الذاتية لحالة الإستقرار لجسيم محصور في صندوق طول ضلعه  $L$  ( حل معادلة شرودنجر في بعد واحد) كما يلي

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L$$

وبالمثل ، يكون حل معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي على صورة دوال موجية معايرة- متعامدة *orthonormal* .

ويمكن ان ينظر الى معادلة (3.14.2) كتعبير لحالة النظام  $\psi$  بدلالة تركيب من الحالات الذاتية  $\varphi_m$  . ايضا ، تعني هذه المعادلة ان قياس الكمية  $Q$  الممثلة بالمؤثر  $\hat{Q}$  للحالة  $\psi$  يعطي قيمة واحدة من القيم الذاتية  $q_1, q_2, \dots, q_m$  . اي ان كل المعاملات ما عدا واحدا منها ، لنقول  $c_m$  ، تكون صفرية القيمة . وعليه ، تصبح معادلة (3.14.2) بالصورة التالية

$$\psi = c_m \varphi_{qm} \quad \dots(3.14.3)$$

وهذا يعني ان قياس الكمية  $Q$  في الحالة  $\psi$  سيعطي قيمة واحدة فقط  $c_m$  .

اما اذا لم تكن كل قيم  $c$  صفرا ، فإن قياس  $Q$  في الحالة  $\psi$  لا يعطي قيمة محددة ، وانما يكون في مجال له قيمة متوقعة كالتالي



$$\begin{aligned}
\int \varphi_n^* \psi d\tau &= \int \varphi_n^* \sum_m c_m \varphi_m d\tau \\
&= \sum_m c_m \int \varphi_n^* \varphi_m d\tau \\
&= \sum_m c_m \delta_{nm} \\
&= c_n
\end{aligned}$$

وبعبارة اخرى ، يكون معامل النشر كما يلي

$$c_n = \int \varphi_n^* \psi d\tau = \langle \varphi_n | \psi \rangle \quad \dots(3.14.6)$$

### (3.15) المؤثر الملاصق *Adjoint Operator*

لنفرض ان  $\hat{Q}$  ،  $\hat{R}$  هما مؤثرين بحيث

$$\int \varphi^* \hat{Q} \psi d\tau = \int (\hat{R} \varphi)^* \psi d\tau \quad \text{or} \quad (\varphi, \hat{Q} \psi) = (\hat{R} \varphi, \psi) \quad \dots(3.15.1)$$

عندئذ نقول ان  $\hat{R}$  مؤثرا ملاصقا للمؤثر  $\hat{Q}$  ويرمز له بالرمز  $\hat{Q}^+$  ، اي ،  $\hat{R} = \hat{Q}^+$  . كما يمكن اعادة كتابة معادلة (3.15.1) على النحو التالي

$$\int \varphi^* \hat{Q} \psi d\tau = \int (\hat{Q}^+ \varphi)^* \psi d\tau \quad \dots(3.15.2)$$

او

$$\langle \varphi | \hat{Q} \psi \rangle = \langle \hat{Q}^+ \varphi | \psi \rangle \quad \dots(3.15.3)$$

وبعبارة اخرى ، طالما يكون الإهتمام بقيمة التكامل ، لا يكون هناك اختلاف اذا كان  $\hat{Q}$  يعمل على الدالة  $\psi$  او  $\hat{Q}^+$  يعمل على الدالة الأخرى  $\varphi$  .

### (3.16) المؤثر الهيرميتي (المؤثر ذاتي التلاصق) *Self-Adjoint or Hermitian Operator*



يكون المؤثر  $\hat{Q}$  ذاتي التلاصق ( او هيرميتي ) اذا كان  $\hat{Q}^+ = \hat{Q}$  . حيث ان المتغيرات الديناميكية تكون كميات حقيقية real ولذلك يجب ان تكون مؤثراتها هيرميتية . من خواص هذه المؤثرات ما يلي

$$\int \varphi^* \hat{Q} \psi d\tau = \int (\hat{Q} \varphi)^* \psi d\tau \quad \text{or} \quad (\varphi, \hat{Q} \psi) = (\hat{Q} \varphi, \psi) \quad \dots(3.16.1)$$

او باستخدام ترميز ديراك ، يمكن كتابة هذه المعادلة على الصورة التالية

$$\langle \varphi | \hat{Q} \psi \rangle = \langle \hat{Q} \varphi | \psi \rangle \quad \dots(3.16.2)$$

حيث تكون  $\varphi, \psi$  دوال مطلقة *arbitrary functions* .

### (3.17) الدوال الذاتية للمؤثر الهيرميتي *Eigen Function of Hermitian Operators*

لنفرض ان  $\hat{Q}$  مؤثرا ذاتي التلاصق ( هيرميتي ) ، اذا كانت  $\varphi_m, \varphi_n$  دالتان خاصتان *Eigen functions* تقابلان قيمتين ذاتيتين مختلفتين هما  $q_n, q_m$  ، فإن

$$\begin{aligned} \hat{Q} \varphi_m &= q_m \varphi_m \\ \hat{Q} \varphi_n &= q_n \varphi_n \end{aligned} \quad \dots(3.17.1)$$

يكون شرط التلاصق الذاتي كما يلي

$$\int \varphi_m^* \hat{Q} \varphi_n d\tau = \int (\hat{Q} \varphi_m)^* \varphi_n d\tau \quad \dots(3.17.2)$$

$$\int \varphi_m^* q_n \varphi_n d\tau = \int q_m^* \varphi_m^* \varphi_n d\tau$$

$$(q_n - q_m^*) \int \varphi_m^* \varphi_n d\tau = 0$$

حيث  $q_n \neq q_m$  ، يجب ان يكون

$$\int \varphi_m^* \varphi_n d\tau = 0 \quad \dots(3.17.3)$$

هكذا تكون الدوال الذاتية المنتمية لقيم ذاتية مختلفة لها خاصية التعامد او تعامدية *orthogonal* .

### (3.18) Eigen Value of Hermitian Operator القيم الذاتية للمؤثر الهرميتي

لنفرض ان القيم الذاتية للمؤثر  $\hat{Q}$  في الحالتين  $\varphi_n, \varphi_m$  هي  $q_n, q_m$  على الترتيب . اي ان

$$\begin{aligned}\hat{Q}\varphi_m &= q_m\varphi_m \\ \hat{Q}\varphi_n &= q_n\varphi_n\end{aligned}\quad \dots(3.18.1)$$

حيث ان  $\hat{Q}$  مؤثر هيرميتي ، نحصل على التالي

$$\int \varphi_m^* \hat{Q}\varphi_n d\tau = \int (\hat{Q}\varphi_m)^* \varphi_n d\tau \quad \dots(3.18.2)$$

$$\int \varphi_m^* q_n \varphi_n d\tau = \int q_m^* \varphi_m^* \varphi_n d\tau$$

$$(q_n - q_m^*) \int \varphi_m^* \varphi_n d\tau = 0$$

تكون هذه العلاقة صحيحة لجميع قيم  $m, n$  . وبشكل خاص ، يجب ان تكون صحيحة عند  $m = n$  ايضا .  
وعليه ،

$$(q_n - q_n^*) \int \varphi_n^* \varphi_n d\tau = 0$$

حيث ان التكامل في الطرف الأيسر ليس صفرا ، هذا يستوجب ما يلي

$$q_n = q_n^* \quad \dots(3.18.3)$$

وهذا يثبت ان القيم الذاتية للمؤثر الهرميتي تكون **حقيقية** .

### تمارين محلولة

(1) اختر الدوال الموجية المقبولة acceptable wave function من الدوال التالية :

$$(i) \psi = x^n \quad (ii) \psi = e^x \quad (iii) \psi = e^{-x} \quad (iv) \psi = \sin x$$

$$(v) \psi = \exp(-x^2) \quad (vi) \psi = \tan x.$$

### الحل

يجب ان تكون الدوال المقبولة محددة ، متصلة ، وذات قيم وحيدة . وعليه

- (i) As  $x \rightarrow \pm \infty$ ,  $\psi \rightarrow \pm \infty$ . Hence  $x''$  is not an acceptable function.
- (ii) As  $x \rightarrow \infty$ ,  $\psi \rightarrow \infty$ . So  $e^x$  is not acceptable.
- (iii) As  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\psi \rightarrow \infty$ . So  $e^{-x}$  is not acceptable.
- (iv)  $\sin x$  oscillates between  $-1$  and  $+1$ , so it is acceptable.
- (v) As  $x \rightarrow \pm \infty$ ,  $\psi \rightarrow 0$ , so it is acceptable.
- (vi)  $\tan x$  blows at  $x = \pi/2$ , hence it is not acceptable.

(2) جد تعبيرات للمؤثرات التالية :

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)^2, \left(x \frac{d}{dx}\right)^2, \left(\frac{d}{dx}(x)\right)^2$$

الحل

(i)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} + x\right)^2 \psi &= \left(\frac{d}{dx} + x\right) \left(\frac{d}{dx} + x\right) \psi \\ &= \left(\frac{d}{dx} + x\right) \left(\frac{d\psi}{dx} + x\psi\right) \\ &= \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2x \frac{d\psi}{dx} + (x^2 + 1)\psi \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + x^2 + 1$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\left(x \frac{d}{dx}\right)^2 \psi &= \left(x \frac{d}{dx}\right) \left(x \frac{d}{dx}\right) \psi = \left(x \frac{d}{dx}\right) \left(x \frac{d\psi}{dx}\right) \\
&= x \left( \frac{d\psi}{dx} + x \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) \\
&= x \frac{d\psi}{dx} + x^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} \\
\left(x \frac{d}{dx}\right)^2 &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx} x\right)^2 \psi &= \left(\frac{d}{dx} x\right) \left(\frac{d}{dx} x\right) \psi = \left(\frac{d}{dx} x\right) \left(\frac{d}{dx} x\psi\right) \\
&= \frac{d}{dx} x \left( \psi + x \frac{d\psi}{dx} \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left( x\psi + x^2 \frac{d\psi}{dx} \right) \\
&= \psi + x \frac{d\psi}{dx} + 2x \frac{d\psi}{dx} + x^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} \\
\left(\frac{d}{dx} x\right)^2 &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 3x \frac{d}{dx} + 1
\end{aligned}$$

(3) يتحرك جسيم في بعد احادي وفقا لدالة موجية معطاة كما يلي

$$\psi(x) = \left( \frac{\sqrt{2}}{\pi} \right)^{1/2} \frac{x + ix}{1 + ix^2}$$

جد كثافة الإحتمال لموقع هذا الجسيم والتي في الغالب تكون الأكثر تواجدا.

**الحل**

تكون كثافة احتمالية الموقع كما يلي

$$P = \psi^* \psi = |\psi|^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{x^2}{1+x^4}$$

نستخدم شرط القيمة العظمى لمقدار **P** :

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2x(1+x^4) - x^2 \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

(4) جد قيمة الثابت  $A$  التي تجعل الدالة  $\exp(-\lambda x^2)$  دالة ذاتية للمؤثر  $\left[ \frac{d^2}{dx^2} - Ax^2 \right]$ . ثم جد القيمة الذاتية المقابلة ؟.

**الحل**

تكون معادلة القيمة الذاتية لهذا المؤثر كالتالي

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - Ax^2 \right) \exp(-\lambda x^2) = q \exp(-\lambda x^2),$$

حيث  $q$  القيمة الذاتية .

ويتبع بإشتقاق الطرف الأيسر ما يلي

$$(-2\lambda + 4\lambda^2 x^2 - Ax^2) \exp(-\lambda x^2) = q \exp(-\lambda x^2)$$

ستكون الدالة  $\exp(-\lambda x^2)$  دالة ذاتية للمؤثر اذا كان  $(4\lambda^2 x^2 - Ax^2 - 2\lambda)$  لا يعتمد على  $x$ . اي انه يجب انعدام معامل  $x^2$ . وعليه

$$4\lambda^2 - A = 0 \quad \text{or} \quad A = 4\lambda^2.$$

كما تصبح صورة هذا المؤثر كما يلي

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - 4\lambda^2 x^2 \right)$$

تكون معادلة القيمة الذاتية كما يلي

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - 4\lambda^2 x^2 \right) \exp(-\lambda x^2) = q \exp(-\lambda x^2)$$

بإشتقاق الطرف الأيسر وبمساواة الناتج مع الطرف الأيمن ، نجد ان القيمة الذاتية  $q$  تساوي  $-2\lambda$  .

(5) عاير دالة الموجة التالية

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A \exp(-\lambda x), & \text{for } x > 0 \\ &= A \exp(\lambda x), & \text{for } x < 0 \end{aligned}$$

حيث  $\lambda$  ثابت موجب .

**الحل**

بإستخدام شرط المعايرة التالي:  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx = 1$  ، نجد ان

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 A^2 \exp(2\lambda x) dx + \int_0^{\infty} A^2 \exp(-2\lambda x) dx &= 1 \\ A &= \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

وعليه ، تكون الدالة المعايرة كما يلي

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{\lambda} \exp(-\lambda x) \text{ for } x > 0, \text{ and} \\ \psi(x) &= \sqrt{\lambda} \exp(\lambda x) \text{ for } x < 0. \end{aligned}$$

(6) اذا كانت القيمة الذاتية للمؤثر  $x + \frac{d}{dx}$  تساوي  $\lambda$ . جد الدالة الذاتية المقابلة ؟.

**الحل**

نفرض ان  $\psi$  تمثل الدالة الذاتية . تكون معادلة القيمة الذاتية كالتالي

$$\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi = \lambda\psi$$

$$x\psi + \frac{d\psi}{dx} = \lambda\psi$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = -(x - \lambda)dx$$

$$\psi = c \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \lambda x\right)$$

(7) بين اين من الدوال التالية تكون دالة ذاتية للمؤثر  $\frac{d^2}{dx^2}$  ؟. ثم جد القيمة الذاتية لكل حالة .

$$(i) \psi = A \sin mx \quad (ii) \psi = B \cos nx \quad (iii) \psi = Cx^2 \quad (iv) \psi = D/x \quad (v) \psi = A e^{-mx}$$

الحل

$$(i) \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} A \sin mx = -m^2\psi$$

وعليه ، تكون الدالة  $\psi = A \sin mx$  دالة ذاتية وتكون القيمة الذاتية تساوي  $-m^2$

$$(ii) \frac{d^2}{dx^2}(B \cos nx) = -n^2(B \cos nx)$$

وعليه ، تكون  $\psi = B \cos nx$  دالة ذاتية والقيمة الذاتية المقابلة تساوي  $-n^2$  .

$$(iii) \frac{d^2}{dx^2} Cx^2 = 2C$$

وعليه ،

$\psi = Cx^2$  ليست دالة ذاتية ولا يوجد قيمة ذاتية مقابلة .

$$(iv) \psi = D/x$$

هذه الدالة ليست دالة ذاتية لأنها غير متصلة عند قيمة  $x = 0$  .

$$(v) \frac{d^2}{dx^2}(Ae^{-mx}) = m^2(Ae^{-mx})$$

وعليه ، تكون هذه الدالة دالة ذاتية والقيمة الذاتية المرافقة تساوي  $m^2$  .

(8) جد الدالة الذاتية والقيمة الذاتية لمؤثر الزخم :

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

**الحل**

نحتاج حل المعادلة التالية

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \psi_n(x) = q_n \psi_n(x)$$

$$-i\hbar \frac{d\psi}{\psi} = q_n dx$$

$$-i\hbar \ln \psi = q_n x + \ln c$$

$$\psi = c \exp(iq_n x / \hbar)$$

تكون القيمة الذاتية  $q_n$  اي عدد. مع ذلك ، فإذا طبقنا الشرط الحدودي على ان تكون الدالة  $\psi_n(x)$  دورية في مسافة  $L$  ، فإن

$$\exp(iq_n x / \hbar) = \exp(iq_n (x + L) / \hbar)$$

$$\exp(iq_n L / \hbar) = 1$$

$$\cos \frac{q_n L}{\hbar} = 1$$

$$q_n = \frac{2\pi n \hbar}{L}, \quad n \text{ is an integer.}$$

وبذلك تصبح الدالة الذاتية كما يلي



$$\psi_n(x) = c \exp\left(\frac{i2\pi nx}{L}\right)$$

وعليه ، تكون القيم الذاتية منفصلة وحقيقية . وهذا يظهر ان القيم الذاتية والدوال الذاتية لا تعتمد فقط على طبيعة المؤثر بل ايضا على الشروط الحدودية .

(9) جد الدوال الذاتية والقيم الذاتية للمؤثر

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{d}{d\varphi} .$$

**الحل**

نستخدم معادلة القيم الذاتية التالية

$$-i\hbar \frac{d\psi(\varphi)}{d\varphi} = q\psi(\varphi)$$

$$\frac{d\psi}{\psi} = -\frac{q}{i\hbar} d\varphi$$

$$\psi = c \exp\left(\frac{iq\varphi}{\hbar}\right)$$

نلاحظ ان الدالة  $\psi$  دالة دورية في المتغير  $\varphi$  وبدور يساوي  $2\pi$  ، اي  $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$  ، وهذا الشرط يؤدي الى ان تكون القيمة الذاتية  $q$  تساوي المضاعفات الصحيحة لثابت بلانك  $\hbar$  وتكون الدالة  $\psi$  دالة ذاتية .

(10) برهن ان المؤثر التالي يكون مؤثرا هيرميتي

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

**الحل**

نفرض ان  $\psi, \varphi$  دوال متعامدة ، وعليه يجب اثبات ما يلي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p}_x \varphi d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi (\hat{p}_x \psi)^* d\tau$$

يكون الطرف الأيسر كما يلي

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-i\hbar \frac{d}{dx}) \psi d\tau = -i\hbar \left[ (\psi^* \psi)_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{d\psi^*}{dx} \right] \\
&= 0 + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{d\psi^*}{dx} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi (i\hbar \frac{d\psi^*}{dx}) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi (-i\hbar \frac{d\psi}{dx})^* d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \psi (\hat{p}_x \psi)^* d\tau
\end{aligned}$$

(11) برهن ما يلي : اذا كان  $\hat{A} = 3x^2$  و  $\hat{B} = \frac{d}{dx}$  ، فإن  $\hat{A}, \hat{B}$  غير تبديلين ؟.

الحل

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] \psi &= \left[ 3x^2, \frac{d}{dx} \right] \psi = \left[ 3x^2 \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} (3x^2) \right] \psi = 3x^2 \frac{d\psi}{dx} - \frac{d}{dx} (3x^2 \psi) \\
&= -6x\psi \neq 0
\end{aligned}$$

وعليه لا يكون هذين المؤثرين تبديلين .

(12) برهن ان

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{A}, \hat{B}].$$

الحل

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}] \psi &= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) \psi = \hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi \\
[\hat{B}\hat{A}] \psi &= (\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}) \psi = \hat{B}\hat{A}\psi - \hat{A}\hat{B}\psi = -(\hat{A}\hat{B}\psi - \hat{B}\hat{A}\psi) \\
&= -[\hat{A}, \hat{B}] \psi .
\end{aligned}$$

(13) اثبت ما يلي

$$[x^n, \hat{p}_x] = i\hbar n x^{n-1}$$

الحل

$$\begin{aligned} (\hat{x}^n \hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x}^n) \psi &= \left\{ x^n (-i\hbar \frac{d}{dx}) - (-i\hbar \frac{d}{dx} x^n) \right\} \psi \\ &= -i\hbar \left\{ x^n \frac{d\psi}{dx} - \frac{d}{dx} x^n \psi \right\} \\ &= i\hbar n x^{n-1} \psi. \end{aligned}$$

(14) بين ان الدالة التالية

$$\psi(x) = cx \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

تمون دالة ذاتية للمؤثر التالي

$$\left( x^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right).$$

ثم جد القيمة الذاتية ، ثابت المايرة ، والقيمة المتوقعة للمتغير  $x$  للحالة الموصوفة بهذه الدالة ، عندما تتغير  $x$  من  $-\infty \rightarrow +\infty$  .

الحل

$$\begin{aligned} \left( x^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) cx \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) &= cx^3 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - c \frac{d^2}{dx^2} x \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \\ &= 3cx \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \end{aligned}$$

وعليه ، تكون القيمة الذاتية تساوي 3

نحصل على ثابت المعايرة  $c$  باستخدام المعادلة التالية

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$c^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = 1$$

$$\left[ \because \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{1/2} \right]$$

$$c^2 \left( \frac{\pi}{4} \right)^{1/2} = 1$$

$$c = \left( \frac{4}{\pi} \right)^{1/4}$$

تكون القيمة المتوقعة للمتغير  $x$  كما يلي

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} c x e^{-\frac{1}{2}x^2} x c x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = 0$$

(integrand is odd function)

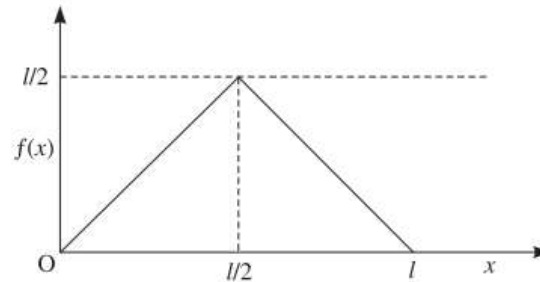
(15) بدلالة دالة موجة الجسيم المحصور في صندوق احادي البعد وفي حالة الأستقرار ، جد نشرًا للدالة التالية

$$f(x) = x \quad 0 \leq x \leq l/2$$

$$f(x) = l - x \quad l/2 \leq x \leq l$$

الحل

يكون الشكل البياني لهذه الدالة كما يلي



نفرض ان

$$f(x) = \sum a_n \psi_n(x)$$

حيث

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^l \psi_n^*(x) f(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} f(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^{l/2} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{l/2}^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{(2l)^{3/2}}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad \text{where } \sin \frac{n\pi}{2} = 0 \text{ for even } n \\ &\quad = \pm 1 \text{ for odd } n \\ &= \frac{4l}{\pi^2} \left[ \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right] \end{aligned}$$

(حيث استخدمنا العلاقة التالية لإجراء التكاملات وهي

$$\int x \sin bx dx = \frac{1}{b^2} \sin bx - \frac{x}{b} \cos bx$$

(16) اذا كانت  $\psi_0, \psi_1$  هما دالة موجة الحالة الأرضية والحالة المستثارة الأولى ، وكانت الطاقات المقابلة لهما هي  $E_0, E_1$  . اذا كانت نسبة احتمال تواجد النظام في الحالة الأرضية وفي الحالة الأولى تساوي 40% , 60% على الترتيب . جد ما يلي

(i) دالة موجة الذرة .

(ii) متوسط طاقة الذرة .

الحل

نفرض ان دالة الموجة للذرة كما يلي

$$\Psi = c_0 \psi_0 + c_1 \psi_1 \dots (1)$$

حيث  $c_1, c_0$  هما معاملات النشر ، ويكون  $c_0^2$  يمثل احتمالية تواجد النظام في الحالة  $\psi_0$  وبطاقة ذاتية ذات قيمة  $E_0$ . اي ان

$$c_0^2 = 0.40 \quad \therefore \quad c_0 = \sqrt{0.40}$$

وبالمثل ، يكون

$$c_1^2 = 0.60 \quad \therefore \quad c_1 = \sqrt{0.60} \quad \dots(2)$$

بالطبع ، يكون

$$c_0^2 + c_1^2 = 1$$

وعليه ، تكون دالة موجة النظام للحالة كما يلي

$$\psi = c_0\psi_0 + c_1\psi_1 = \sqrt{0.40}\psi_0 + \sqrt{0.60}\psi_1$$

اما متوسط طاقة النظام في هذه الحالة كالتالي

$$\langle E \rangle = c_0^2 E_0 + c_1^2 E_1 = 0.40E_0 + 0.60E_1$$

(17) برهن ان مؤثر هملتون يجب ان يكون هيرميتي لحفظ دالة الاحتمالية .؟

**الحل**

تكون معادلة شرودنجر الزمانية كما يلي

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad \dots(1)$$

ويكون المرافق المركب كالتالي

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \hat{H}^* \psi^* \quad \dots(2)$$

بضرب المعادلة (1) بالدالة  $\psi^*$  ومعادلة (2) بالدالة  $\psi$  وبطرح احدى المعادلتين الناتجتين من بعضهما البعض نحصل على التالي

$$i\hbar \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] = \psi^* \hat{H} \psi - \psi \hat{H}^* \psi^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \frac{1}{i\hbar} [\psi^* \hat{H} \psi - \psi (\hat{H} \psi)^*]$$

بالتكامل على كل الفضاء ، نجد ان

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \psi^* \psi d\tau = \frac{1}{i\hbar} \left[ \int \psi^* (\hat{H} \psi) d\tau - \int \psi (\hat{H} \psi)^* d\tau \right]$$

يتطلب حفظ الاحتمالية ما يلي

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \psi^* \psi d\tau = 0.$$

ويكون هذا ممكنا اذا كان

$$\int \psi^* (\hat{H} \psi) d\tau = \int (\hat{H} \psi)^* \psi d\tau$$

وهذا هو شرط الهيرميتية لمؤثر هملتون .

(18) برهن ان

$$(i) [\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x \quad (ii) [\hat{x}, \hat{p}_x^2] = 2\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x}$$

الحل

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{H}] &= [\hat{x}, \hat{T} + \hat{V}] = [\hat{x}, \hat{T}] + [\hat{x}, \hat{V}] = [\hat{x}, \hat{T}] = \left[ \hat{x}, \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} \right] \\ &= \frac{1}{2m} [\hat{x}, \hat{p}_x^2] + \frac{1}{2m} [\hat{x}, \hat{p}_y^2] + \frac{1}{2m} [\hat{x}, \hat{p}_z^2] = \frac{1}{2m} \cdot 2\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x \\ [\hat{x}, \hat{p}_x^2] &= [\hat{x}, \hat{p}_x] \hat{p}_x + \hat{p}_x [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \cdot i\hbar = 2\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

(19) عند  $t = 0$  ، اذا كانت دالة الموجة لمتذبذب توافقي في حالة ما تعطى بالعلاقة التالية

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_0(x) + i\sqrt{\frac{2}{3}} \psi_2(x)$$

حيث  $\psi_0, \psi_2$  هما دوال الموجة في الحالة الأرضية والحالة المثارة الثانية على الترتيب .

(i) جد تطور هذه الدالة الموجية مع الزمن.

(ii) جد متوسط طاقة المتذبذب.

**الحل**

يكون الصورة الرياضية لدالة الموجة الزمانية والمكانية كما يلي

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_0(x) \exp(-\frac{1}{2}i\omega t) + i\sqrt{\frac{2}{3}} \psi_2(x) \exp(-\frac{5}{2}i\omega t)$$

حيث ان طاقة المتذبذب التوافقي للحالة  $n$  تعطى بالعلاقة التالية :  $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$  ، لذلك تكون طاقته في الحالة الأرضية ( $n=0$ ) تساوي  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$  ، وتكون طاقته في الحالة المثارة الثانية ( $n = 2$ ) تساوي  $E_2 = (\frac{5}{2})\hbar\omega$  . بينما من خلال معنى معاملات النشر ، نجد ان احتمالية تواجد المتذبذب في الحالة الأرضية بطاقة  $\frac{1}{2} \hbar\omega$  تساوي  $(1/\sqrt{3})^2 = 1/3$  وفي الحالة  $n=2$  ، تكون احتمالية تواجده بطاقة  $(\frac{5}{2})\hbar\omega$  مساوية للمقدار  $[\sqrt{2/3}]^2 = 2/3$  .  
وعليه ، يكون متوسط طاقة المتذبذب كما يلي

$$\langle E \rangle = c_0^2 E_0 + c_2^2 E_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \hbar\omega \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{5}{2} \hbar\omega \right) = \frac{11}{6} \hbar\omega$$

(20) برهن ان قيمة معدل مربع المؤثر الهيرميتي تكون موجبة .

**الحل**



نفرض ان  $\hat{Q}$  مؤثرا هيرميتيا ، تكون معادلة القيم الذاتية لمربع هذا المؤثر كالتالي

$$\hat{Q}^2\psi = \lambda^2\psi$$

وعليه ، يجب اثبات ان  $\lambda^2$  كمية موجبة . تكون قيمة معدل (متوسط)  $\hat{Q}^2$  كما يلي:

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle &= \int \psi^* \hat{Q}^2 \psi d\tau = \int \psi^* \hat{Q} \hat{Q} \psi d\tau = \int (\hat{Q}\psi)^* (\hat{Q}\psi) d\tau = \int (\lambda\psi)^* (\lambda\psi) d\tau \\ &= \lambda^* \lambda \int \psi^* \psi d\tau = \lambda^* \lambda = |\lambda|^2 = \text{positive number.} \end{aligned}$$

(21) برهن ان عملية المرافقة المركبة *complex conjugation* لا تعطي (i) مؤثرا خطيا (ii) ولا مؤثرا هيرميتيا ؟

الحل

(i) لنرمز الى المرافق المركب بالمؤثر  $\hat{A}$  . اذن ،

$$\hat{A}\psi = \psi^* \quad \dots(1)$$

لنفرض ان  $\psi$  تتكون من التركيب الخطي للدالتين  $\psi_1, \psi_2$  . وعليه ،

$$\hat{A}\psi = \hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = (c_1\psi_1 + c_2\psi_2)^* = c_1^*\psi_1^* + c_2^*\psi_2^* \quad \dots(2)$$

اذا كان  $\hat{A}$  مؤثرا خطيا ، فإننا نتوقع النتيجة التالية

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = \hat{A}(c_1\psi_1) + \hat{A}(c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2 = c_1\psi_1^* + c_2\psi_2^* \quad \dots(3)$$

بما ان معادلة (1) ليست نفس معادلة (2) ، لذلك  $\hat{A}$  لا يكون مؤثرا خطيا .

(ii) يحقق اي مؤثر هيرميتي الشرط التالي

$$\int \psi^* \hat{Q} \phi d\tau = \int (\hat{Q}\psi)^* \phi d\tau \quad \dots(1)$$

بالنسبة للمؤثر  $\hat{A}$  :

يكون الطرف الأيسر في معادلة الشرط كما يلي

$$\int \psi^* \hat{A} \phi d\tau = \int \psi^* \phi^* d\tau$$

بينما يكون الطرف الأيمن في الشرط كما يلي

$$\int (\psi^*)^* \phi d\tau = \int \psi \phi d\tau$$

بما ان

$$\int \psi^* \phi^* d\tau \neq \int \psi \phi d\tau$$

، لذلك المرافق المركب غير هيرميتي .

(22) اذا كانت المجموعة  $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots \dots\}$  تشكل مجموعة متكاملة من الدوال التعامدية- المتعايرة *orthonormal* ، اتبث ان العلاقة الإنغلاقية *closure relation* تكون صحيحة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^*(x') \phi_n(x) = \delta(x - x')$$

**الحل**

لنفرض ان  $\psi(x)$  اي دالة مطلقة ( عشوائية ) . يمكن التعبير عن هذه الدالة بدلالة الدوال التعامدية- المتعايرة المعطاة كما يلي

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad \dots(1)$$

حيث

$$c_n = \int \phi_n^*(x) \psi(x) dx \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int \phi_n^*(x') \psi(x') \right] \phi_n(x) dx' \\
&= \int \psi(x') dx' \cdot \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^*(x') \phi_n(x) \right] \\
&= \int \psi(x') \delta(x-x') dx' \quad \dots(3)
\end{aligned}$$

وعليه ،

حيث

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^*(x') \phi_n(x) = \delta(x-x') \quad [\text{closure relation}]. \quad \dots(4)$$

(23) اثبت ان زخم جسيم حر  $p$  يكون ثابتا للحركة *constant of motion* .؟

الحل

عندما يكون مؤثر الكمية الفيزيائية متبادلا مع الهاملتون  $H$  ، فإن هذه الكمية تكون محفوظة . في حالة الجسيم الحر والتحرك في اتجاه محور  $x$  ، نجد ان

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{and} \quad p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

إذن

$$\hat{p}_x \hat{H} \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) \right] = -\frac{i\hbar^3}{2m} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \psi(x)$$

$$\hat{H} \hat{p}_x \psi(x) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) = -\frac{i\hbar^3}{2m} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \psi(x)$$

لذلك ،

$$[\hat{p}_x, \hat{H}] = \hat{p}_x \hat{H} - \hat{H} \hat{p}_x = 0.$$

(24) اذا كان مؤثر هاملتون للمتذبذب التوافقي هو

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

اثبت ما يلي

$$(i) \quad [\hat{x}, \hat{H}] = \frac{i\hbar p}{m}$$

$$(ii) \quad [\hat{p}_x, \hat{H}] = -i\hbar m\omega^2 x$$

الحل

$$\begin{aligned} (i) \quad [\hat{x}, \hat{H}]\psi &= \frac{1}{2m}[\hat{x}, \hat{p}_x^2]\psi + \frac{1}{2}m\omega^2[\hat{x}, \hat{x}^2]\psi = \frac{1}{2m}\{x(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})^2 - (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})^2 x\}\psi + 0 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\psi)\right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{-2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\} = i\hbar\frac{p_x\psi}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad [\hat{p}_x, \hat{H}]\psi &= \left[\hat{p}_x, \frac{\hat{p}_x^2}{2m}\right]\psi + \left[\hat{p}_x, \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi = 0 + \frac{1}{2}m\omega^2[\hat{p}_x, x^2]\psi \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\left\{(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})(x^2\psi) - x^2(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi\right\} = -i\hbar m\omega^2 x \end{aligned}$$

(25) برهن ان  $i[A, B]$  يكون هيرميتي اذا كان كل من  $A, B$  مؤثرا هيرميتيا .

الحل

نفرض ان  $\hat{Q} = i[\hat{A}, \hat{B}]$  . وعليه ،

$$\hat{Q} = i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$$

افرض ان  $\hat{A}, \hat{B}$  هي مؤثرات هيرميتية ، يكون

$$\begin{aligned}\hat{Q}^+ &= -i\{(\hat{A}\hat{B})^+ - (\hat{B}\hat{A})^+\} = -i\{\hat{B}^+\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{B}^+\} = -i\{\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\} \\ &= i\{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\} = i[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{Q}.\end{aligned}$$

هكذا يكون  $\hat{Q}$  او  $i[\hat{A}, \hat{B}]$  مؤثرا هيرميتيا .

(26) برهن ان مؤثر التعادلية *parity operator* يكون هيرميتي .؟

**الحل**

لنفرض ان  $\hat{P}$  يمثل مؤثر التعادلية ، فإن

$$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

اذا كان هذا المؤثر هيرميتيا ، فإن

$$\int \psi(x)^* \hat{P} \phi(x) dx = \int (\hat{P}\psi)^* \phi dx$$

او

$$\int \psi^*(x)\phi(-x) dx = \int \psi^*(-x)\phi(x) dx \quad \dots(1)$$

لنفرض اننا حولنا المتغير في الطرف الأيسر من معادلة (1) من خلال التعويض  $x = -x$  ، نجد ان

$$\text{LHS} = \int \psi^*(-x') \phi(x') dx' = \int \psi^*(-x)\phi(x) dx = \text{RHS of Eqn. (1)}$$

(27) برهن ان يمكن التعبير عن كل مؤثر بدلالة ترابط بين مؤثرين كل منهما هيرميتيا .؟

**الحل**

نفرض ان  $\hat{A}$  مؤثرا بحيث يكون له  $\hat{A}^+$  مؤثرا ملاصقا *adjoint* . ايضا ، افرض ان

$$\hat{A} = \left( \frac{\hat{A} + \hat{A}^+}{2} \right) + i \left( \frac{\hat{A} - \hat{A}^+}{2i} \right) = \hat{B} + i\hat{C}$$

حيث

$$\hat{B} = \frac{\hat{A} + \hat{A}^+}{2} \quad \text{and} \quad \hat{C} = \frac{\hat{A} - \hat{A}^+}{2i}$$

اذن ،

$$\hat{B}^+ = \frac{\hat{A}^+ + \hat{A}}{2} = \hat{B} \quad \text{and} \quad \hat{C}^+ = \frac{\hat{A}^+ - \hat{A}}{-2i} = \frac{\hat{A} - \hat{A}^+}{2i} = \hat{C}$$

هكذا يكون كلا المؤثران  $\hat{B}, \hat{C}$  هيرميتية . لذلك ، يمكن التعبير عن  $\hat{A}$  كالتالي :  $\hat{A} = \hat{B} + i\hat{C}$  .

(28) اذا كانت  $\varphi_1, \varphi_2$  دالتين ذاتيتين منحلّتين ثنائيا للمؤثر الخطي  $H$  ، اثبت ان الدالة

$\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$  تكون دالة ذاتية لهذا المؤثر بنفس القيمة الذاتية للدالتين  $\varphi_1, \varphi_2$  . ؟

**الحل**

من المفروض ان

$$\hat{H}\varphi_1 = \lambda\varphi_1 \quad \text{and} \quad \hat{H}\varphi_2 = \lambda\varphi_2$$

اذا

$$\hat{H}\psi = \hat{H}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\lambda\varphi_1 + c_2\lambda\varphi_2 = \lambda(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = \lambda\psi$$

(29) جد حل معادلة القيمة الذاتية التالية:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \lambda\psi.$$

ثم ناقش الشروط التي تجعل الدوال الذاتية حسنة السلوك ومتى تكون  $\lambda$  قيمة ذاتية ؟.

**الحل**

اذا كانت  $\lambda \neq 0$  فإن حل المعادلة المعطاة في السؤال يكون كالتالي

$$\psi = c_1 \exp(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda} x)$$

حيث  $c_1, c_2$  ثوابت مطلقة . نتناول الحالات التالية

(i) عندما  $\lambda < 0$  ، نفرض ان  $\sqrt{\lambda} = im$  ، يكون الحل كما يلي

$$\psi = c_1 \exp(imx) + c_2 \exp(-imx)$$

عندما  $|x| \rightarrow \infty$  فإن  $\psi \rightarrow \infty$  . لذلك ، يكون الحل غير حسن السلوك *well behaved*.

(ii) عندما  $\lambda \geq 0$  ، يكون الحل كما يلي

$$\psi = c_1 \exp(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda} x)$$

اذا كان  $x < 0$  ، يكون الحد الأول في هذا الحل محدد *finite* لجميع قيم  $x$  السالبة ، بينما يؤؤل الحد الثاني في الحل الى  $\infty$  عند  $x \rightarrow -\infty$  . وعليه تكون الدالة  $\psi$  ليست حسنة السلوك .

اما اذا كان  $x > 0$  فإن الحد الأول يصبح غير محدد عند ما  $x \rightarrow \infty$  ويبقى الحد الثاني محددًا لجميع  $x$  . وعليه تكون الدالة  $\psi$  ليست حسنة السلوك .

(iii) عندما تكون  $\lambda = 0$  فإن  $\psi = Cx + D$  . يكون الحل حسن السلوك عند  $C = 0$  ، وفي هذه الحالة  $\psi = D$  .

(30) ناقش طبيعة حل المعادلة التالية

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \pm c\psi, \quad -\infty < x < \infty,$$

حيث  $c$  عدد ثابت موجب .

الحل

الحالة الأولى : لنختار الإشارة الموجبة في المعادلة المعطاة في السؤال . يكون حل هذه المعادلة كما يلي

$$\psi = A \exp(\sqrt{c} x) \pm B \exp(-\sqrt{c} x)$$

نقيم  $x \rightarrow \pm\infty$  ، تكون  $\psi$  ليست حسنة السلوك . مع ذلك ، اذا كانت  $A = 0$  فإن  $\psi = B \exp(-\sqrt{c} x)$

وتكون دالة الموجة  $\psi$  حسنة السلوك خلال الفترة  $0 < x < \infty$  . بينما اذا كان  $B = 0$  فإن  $\psi = A \exp(\sqrt{c} x)$  ، وتكون الدالة حسنة السلوك لقيم  $x < 0$  .

الحالة الثانية : نختار الإشارة السالبة . يكون حل المعادلة التفاضلية كما يلي

$$\psi = A \sin \sqrt{c} x + B \cos \sqrt{c} x$$

ويكون هذا الحل حسن السلوك لجميع قيم  $x$  ، وتشكل القيم الذاتية (-c) طيفا مستمرا (متصلا).

### تمارين

(1) اذا كانت دالة موجة جسيم يتحرك في منطقة جهد حرة تعطى بالعلاقة التالية

$$\psi(x) = A \cos kx$$

حيث  $A, k$  ثوابت حقيقية . بين فيما اذا كانت هذه الدالة تشكل حالة ذاتية للمؤثرات التالية :  $\hat{H}, \hat{p}_x, \hat{p}_x^2$  . ثم جد القيم الذاتية المقابلة .

(2) برهن ان

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle$$

(3) اذا كان المؤثر  $\hat{A}$  المصاحب لمشاهدة فيزيائية يحقق معادلة القيمة الذاتية التالية

$$\hat{A} \phi_n(x) = a_n \phi_n(x)$$

(a) جد النتائج الممكنة للمشاهدة  $A$  .

(b) جد القيمة المتوسطة للقياسات عندما يكون النظام في حالة ذاتية محددة  $\phi_n(x)$  .

(4) جد قيمة ما يلي :  $[z^2, p_z]$  ،  $[xz, p_z]$  .

(5) (a) برهن نظرية إيرنست وصف معناها . (b) ما معنى القيمة المتوقعة للكمية الفيزيائية ، ثم احسب

$$\langle P \rangle \text{ if } \phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i(kx - \omega t)].$$



حيث  $P$  مؤثر التعادلية *parity operator*.

(6) اذا كان المؤثران  $\hat{A}, \hat{B}$  هيرميتيان برهن ان  $[A, B]$  يكون مؤثرا هيرميتيا ايضا.

$$(7) \text{ جد ما يلي: } (a) \left[ \frac{d^2}{dx^2}, x \right]$$

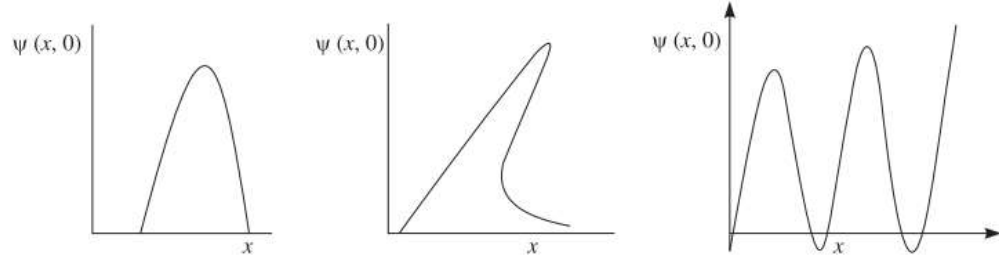
(b) برهن ان :

$$\hat{L}_z \hat{L}_+ = \hat{L}_+ (\hat{L}_z + \hbar) \text{ and } \hat{L}_z \hat{L}_- = \hat{L}_- (\hat{L}_z - \hbar).$$

(8) بين ان اي من الدوال المعطاة ادناه تكون دالة ذاتية للمؤثر  $\frac{d^2}{dx^2}$  :

(i)  $\sin x$ , (ii)  $\log x$ , (iii)  $e^{ax}$  ، حيث  $a$  ثابت . ثم جد القيم الذاتية المقابلة .

(9) (a) بين اي من الدوال الموجية تكون مقبولة او غير مقبولة في ميكانيكا الكم مع ذكر الأسباب .



(b) اذا كان الهملتون يعبر عنه بالصورة التالية :

$$H = \sum_{n,m} C_{nm} x^n p_x^m,$$

برهن نظرية ايرنست ، او

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p_x} \right\rangle \text{ and } \frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \left\langle -\frac{\partial H}{\partial x} \right\rangle$$

$$(10) \text{ جد } [\hat{A}, \hat{B}] \text{ اذا كان } \hat{A} = \hat{x} + \frac{d}{dx}, \hat{B} = \hat{x} - \frac{d}{dx}.$$

(11) (a) جد الهملتون لجسيم كتلته  $m$  ويتحرك بسرعة  $v$  في اتجاه محور  $x$  بطاقة وضع هي

$$V = \frac{A}{x^2} + Bv,$$

حيث  $A, B$  ثوابت .

- (b) برهن ان (i) اذا كان المؤثران  $A, B$  هيرميتيان فإن حاصل ضربهما  $AB$  يكون ايضا هيرميتي.  
(ii) يكون هذان المؤثران  $A, B$  تبديليان .  
(12) (a) برهن ان مؤثر الزخم الخطي يكون هيرميتيا .

(b) اثبت ما يلي

$$[x^n, p_x] = i\hbar n x^{n-1} \text{ and } [x, p_x^m] = i\hbar m p_x^{m-1}$$

(13) للمؤثرات  $A, B, C$  برهن ان  $(ABC)^+ = C^+ B^+ A^+$  .

(14) جد الدوال الذاتية والقيم الذاتية لمؤثر الزخم الخطي  $\hat{p}_x$  ، ثم اعمل معايرة للدوال الذاتية باستخدام تقنية معايرة الصندوق .

(15) اذا كان  $A, B$  مؤثران هيرميتيان ، برهن ان المؤثر  $[A, B]$   $\frac{i}{2}$  يكون هيرميتيا ايضا .

## الفصل الرابع : مسائل حاجز الجهد

### Potential Barrier Problems

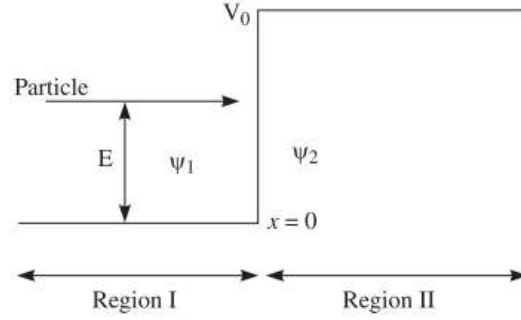
يتناول هذا الفصل حلولاً لمعادلة شرودنجر في عدة حالات من دوال الجهد ، ووصف لدالة الموجة في المناطق المختلفة وإمكانات الحركة للجسيم في هذه المناطق عند تواجده بطاقات كلية مختلفة .

#### (4.1) عتبة الجهد أو عتبة الحاجز Potential Step or Step Barrier

رياضياً ، يمكن وصف عتبة الجهد بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & \text{for } x < 0 \\ &= V_0 & \text{for } x > 0 \end{aligned} \quad \dots(4.1.1)$$

كما يعبر عنها بالمنحنى المبين في الشكل (4.1.1)



شكل (4.1.1) منحنى عتبة الجهد .

في حالة  $E < V_0$  ، تكون حركة جسيما ما في المنطقة I مسموح بها كلاسيكياً وممنوعة في المنطقة II . لنفرض ان جسيما ما بطاقة كلية  $E$  يسقط على هذه العتبة من جهة اليسار . تكون معادلة شرودنجر في المنطقتين I, II كما يلي

المنطقة I : ( $x < 0$ )

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

أو

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0 \quad \dots(4.1.2)$$

حيث

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \dots(4.1.3)$$

المنطقة II :  $(x > 0)$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}\psi_2 = 0$$

او

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2'^2\psi_2 = 0 \quad \dots(4.1.4)$$

حيث

$$k_2' = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad \dots(4.1.5)$$

يكون حل المعادلة (4.1.2) كما يلي

$$\psi_1 = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x) \quad \dots(4.1.6)$$

بينما يكون حل معادلة (4.1.4) كالتالي

$$\psi_2 = C \exp(ik_2'x) + D \exp(-ik_2'x) \quad \dots(4.1.7)$$

حيث  $A, B, C, D$  هي ثوابت مطلقة ، ولتحديد قيم هذه الثوابت نتبع الخطوات التالية:

الحالة I :  $E < V_0$

عندما تكون طاقة الجسيم  $E$  اقل من ارتفاع عتبة الجهد  $V_0$  ، تكون طاقة الجسيم الحركية سالبة في المنطقة II. كلاسيكيا ، لا يكون دخول هذا الجسيم الى هذه المنطقة مسموحا به . في هذه الحالة يكون  $k_2'$  عددا تخيليا ويمكن التعبير عنه كما يلي

$$k_2' = ik_2 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} \quad \dots(4.1.8)$$

وعبر عن حل معادلة (4.1.4) في المنطقة II كما يلي

$$\psi_2 = C \exp(-k_2x) + D \exp(k_2x) \quad \dots(4.1.9)$$

يكون الحد الثاني في الطرف الأيمن من معادلة (4.1.9) دالة متزايدة . وهذا يقود الى ان كثافة الاحتمال لوجود الجسم مع زيادة  $x$  تكون بدون حدود ، وهذا غير مقبول فيزيائيا مما يستوجب جعل الثابت  $D$  يساوي الصفر .

وعليه ، يصبح حل معادلة شرودنجر في المنطقة II كما يلي

$$\psi_2 = C \exp(-k_2 x) \quad \dots(4.1.10)$$

نستخدم الشروط الحدودية لتعيين قيم الثوابت  $B, C$  بدلالة الثابت  $A$  كما يلي

$$(i) \quad \psi_1(0) = \psi_2(0)$$

$$(ii) \quad \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)_{x=0}$$

بتطبيق هذه الشروط على الدوال  $\psi_1, \psi_2$  نحصل على التالي

$$A + B = C \quad \dots(4.1.11)$$

$$ik_1(A - B) = -k_2 C \quad \dots(4.1.12)$$

من استخدام هذه المعادلات ، نحصل على التالي

$$B = \frac{k_1 - ik_2}{k_1 + ik_2} A \quad \dots(4.1.13)$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + ik_2} A \quad \dots(4.1.14)$$

يمكن التعبير عن العلاقة بين  $B, A$  وبين  $C, D$  باستخدام التحويلات التالية

$$k_1 + ik_2 = r e^{i\delta}$$

$$k_1 - ik_2 = r e^{-i\delta}$$

حيث

$$r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad \text{and} \quad \tan \delta = \frac{k_2}{k_1}$$

وعليه ،

$$B = A e^{-2i\delta} \quad \dots(4.1.15)$$

تكون دالة الموجة في المنطقة I كالتالي

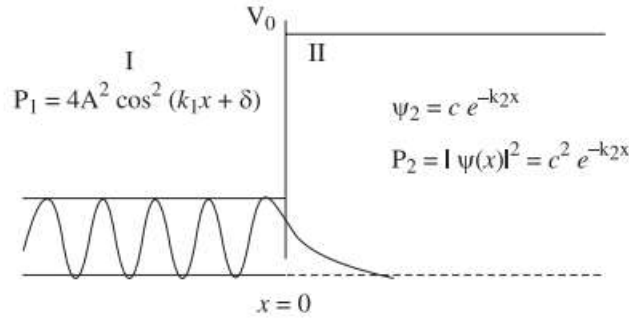
$$\begin{aligned}
\psi_1 &= A \exp(ik_1x) + A \exp(-2i\delta) \exp(-ik_1x) \\
&= A \exp(-i\delta) [\exp(ik_1x + i\delta) + \exp(-ik_1x - i\delta)] \\
&= 2A \exp(-i\delta) \cos(k_1x + \delta) \quad \dots(4.1.16)
\end{aligned}$$

بينما تكون دالة الموجة في المنطقة II كالتالي

$$\psi_2 = C \exp(-k_2x) \quad \dots(4.1.17)$$

نلاحظ ان دالة الموجة في المنطقة I هي تراكب موجتين . حيث يقابل الحد الأول في معادلة (4.1.6) الموجة المنتقلة نحو اليمين ويقابل الحد الثاني في هذه المعادلة الموجة المنتقلة نحو اليسار . ويعطي تركيب هاتين الموجتين موجة موقوفة (ساكنة) والتي تمثلها المعادلة (4.1.16) . كما تساوي النسبة  $B/A$  الواحد الصحيح ، اي ان سعة الموجة الساقطة تساوي سعة الموجة المنعكسة . من هذا يمكن الإستنتاج ان معادلة (4.1.16) تصف الوضع الذي يكون فيه جسما يسقط من اليسار لينعكس الى الخلف بواسطة جبل الجهد  $potential$  hill . يمكن القول ان هذا السلوك يحاكي سلوك الموجة الكهرومغناطيسية عند سقوطها على سطح معدني .

تكون دالة الموجة في المنطقة الممنوعة كلاسيكيا على صورة دالة اسية متناقصة مما يشير الى ان احتمالية تواجد الجسيم في هذه المنطقة يكون محددا  $finite$  . كما يلاحظ ان كثافة الإحتمال تكون بصورة متذبذبة في المنطقة I ، حيث  $x < 0$  ( الشكل (4.1.2) .



شكل (4.1.2) كثافة الإحتمال في المنطقتين ( المسموحة والممنوعة) .

كما تعطى مقادير كثافة الإحتمال في كل من المنطقتين كما يلي

$$P_I = \psi_1^* \psi_1 = 4A^2 \cos^2(k_1x + \delta)$$

$$P_{II} = |\psi_2|^2 = c^2 \exp(-2k_2x)$$

الحالة الثانية ( $E > V_0$ ) :

هنا تكون  $k_2'$  حقيقية  $Real$  . وتكون دالة الموجة في المنطقة II كما يلي

$$\psi_2 = C \exp(ik_2'x) + D \exp(-ik_2'x) \quad \dots(4.1.18)$$

حيث يقابل الحد الأول في هذه المادة الموجة المتحركة نحو اليمين ويمثل الحد الثاني الموجة المتحركة نحو اليسار . كما لا يوجد انعكاس في المنطقة II ، و عليه يكون الثابت D مساويا للصفر . كما تكون الشروط الحدودية عند السطح الفاصل بينهما كالتالي

$$\psi_1(0) = \psi_2(0)$$

$$\left( \frac{d\psi_1}{dx} \right)_{x=0} = \left( \frac{d\psi_2}{dx} \right)_{x=0}$$

باستخدام هذه الشروط الحدودية على الدالتين  $\psi_1, \psi_2$  ، نحصل على التالي

$$A + B = C \quad \dots(4.1.19)$$

$$k_1 A - k_1 B = k_2' C \quad \dots(4.1.20)$$

من المعادلات (4.1.19، 4.1.20) ، نحصل على التالي

$$B = \frac{k_1 - k_2'}{k_1 + k_2'} A \quad \dots(4.1.21)$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2'} A \quad \dots(4.1.22)$$

كما تكون كثافة التيارات المصاحبة للموجة الساقطة ، الموجة المنعكسة ، والموجة النافذة كما يلي

$$J_i = \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2 \quad \dots(4.1.23)$$

$$J_r = \frac{\hbar k_1}{m} |B|^2 \quad \dots(4.1.24)$$

$$J_t = \frac{\hbar k_2'}{m} |C|^2 \quad \dots(4.1.25)$$

وتكون معاملات طاقة الإنعكاس R وطاقة النفاذ T كالتالي

$$R = \frac{J_r}{J_i} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_1 - k_2')^2}{(k_1 + k_2')^2} \quad \dots(4.1.26)$$

$$T = \frac{J_t}{J_i} = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1 k_2'}{(k_1 + k_2')^2} \quad \dots(4.1.27)$$

نلاحظ ان

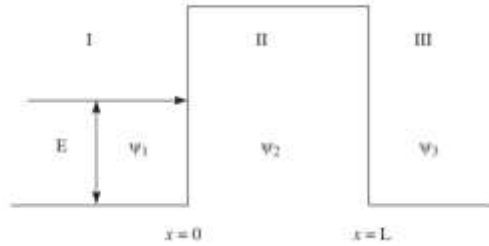
$$R + T = 1 \quad \dots(4.1.28)$$

وهذا يتفق مع مبدأ حفظ الطاقة .

### (4.2) حاجز الجهد ( ظاهرة النفق ) *Potential Barrier (Tunnel Effect)*

حاجز الجهد هو منطقة تكون فيها طاقة الجهد لجسيم ما اكبر من الطاقة الكلية . لنفرض ان حاجز الجهد يكون معرفا كما يلي ( الشكل 4.2.1 ) .

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & \text{for } x < 0 \\ &= V & \text{for } 0 \leq x \leq L \\ &= 0 & \text{for } x > L \end{aligned} \quad \dots(4.2.1)$$



الشكل (4.2.1) حاجز جهد احادي البعد .

لنفرض ان جسما ما يتحرك من اليسار نحو اليمين ويصطدم في طريقه بحاجز الجهد المعروف اعلاه . وفقا للميكانيكا الكلاسيكية يمكن التنبؤ بتصرف هذا الجسيم كما يلي :

(i) اذا كانت طاقة الجسيم اكبر من ارتفاع الحاجز ( $E > V$ ) ، فإن الجسيم يمر فوق الحاجز بدون اي عائق. في داخل الحاجز ، تتضائل سرعة الجسيم ويكتسب هذا الجسيم سرعته الابتدائية من وراء هذا الحاجز .

(ii) اذا كانت  $E < V$  ، ينعكس الجسيم عند الحاجز ولا يكون قادرا على إختراقه.

من الجدير بالذكر ان معالجة ميكانيكا الكم لهذه المسألة تظهر نتائج مختلفة عن ما سبق في المعالجة الكلاسيكية .

اذا كانت  $E > V$  فإنه يوجد احتمالية محددة لإنعكاس الجسيم عن الحاجز ، واذا كانت  $E < V$  فإنه يوجد احتمالية محددة لإختراق هذا الحاجز وتواجد الجسيم في الجانب الأخر من هذا الحاجز. هكذا يسمح ميكانيكا الكم بعملية التسرب خلال حاجز الجهد . وتعرف هذه الظاهرة بظاهرة النفق *tunnel effect* . وفقا لهذه الآلية تنتبع جسيمات الفا  $\alpha$  - particles من النويات المشعة ، رغم كون حاجز الجهد لا يسمح بذلك كلاسيكيا .



في الشكل (4.2.1) ، يقسم حاجز الجهد القضاء الى ثلاث مناطق : I, II, III . تكون الصورة الرياضية لمعادلة شرودنجر في هذه المناطق كما يلي

### I المنطقة

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

أو

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0 \quad \dots(4.2.2)$$

حيث

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \dots(4.2.3)$$

### II المنطقة

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}\psi_2 = 0$$

أو

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2'^2\psi_2 = 0 \quad \dots(4.2.4)$$

حيث

$$k_2' = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}} \quad \dots(4.2.5)$$

بما ان  $k_2'$  تخيلي لذلك يمكن كتابته على الصورة التالية

$$k_2' = ik_2, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} \quad \dots(4.2.6)$$

### III المنطقة

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3 = 0$$

أو

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k_3^2\psi_3 = 0 \quad \dots(4.2.7)$$

حيث

$$k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = k_1 \quad \dots(4.2.8)$$

تكون حلول المعادلات (4.2.2)، (4.2.4) و (4.2.7) كالتالي

$$\psi_1(x) = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x) \quad \dots(4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= C \exp(-ik_2'x) + D \exp(ik_2'x) \\ &= C \exp(k_2x) + D \exp(-k_2x) \end{aligned} \quad \dots(4.2.10)$$

$$\psi_3(x) = F \exp(ik_1x) + G \exp(-ik_1x) \quad \dots(4.2.11a)$$

نلاحظ ان الحد  $\exp(ik_1x)$  يقابل الموجة المنتشرة في اتجاه محور  $x$  الموجب والحد  $\exp(-ik_1x)$  يقابل الموجة المنتشرة في اتجاه محور  $x$  السالب . في المنطقة III يجب ان يوجد موجة واحدة فقط والتي تنفذ من الحاجز وتنتشر من اليسار نحو اليمين، لذلك ، يجب ان نفترض  $G = 0$  . وعليه تصبح دالة الموجة  $\psi_3$  كما يلي

$$\psi_3(x) = F \exp(ik_1x) \quad \dots(4.2.11b)$$

لإيجاد المعاملات الأخرى نستخدم الشروط الحدودية التي يجب ان تحققها هذه الدوال في المناطق . وهي

عند  $x=0$  ،

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad \dots(4.2.12)$$

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0} \quad \dots(4.2.13)$$

عند  $x=L$  ،

$$\psi_2(L) = \psi_3(L) \quad \dots(4.2.14)$$

$$\left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=L} = \left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=L} \quad \dots(4.2.15)$$

تفرضي هذه الشروط الى المعادلات التالية

$$A + B = C + D \quad \dots(4.2.16)$$

$$ik_1A - ik_1B = k_2C - k_2D \quad \dots(4.2.17)$$

$$C \exp(k_2L) + D \exp(-k_2L) = F \exp(ik_1L) \quad \dots(4.2.18)$$

$$k_2C \exp(k_2L) - k_2D \exp(-k_2L) = ik_1F \exp(ik_1L) \quad \dots(4.2.19)$$

هنا نهتم بمعامل النفاذ او احتمالية النفاذ  $T$  ، ومعامل الإنعكاس او احتمالية الإنعكاس  $R$ . حيث تعرف  $T$  بدلالة النسبة بين كثافة التيار  $current\ density$  المصاحبة للشعاع النفاذ وتلك المصاحبة للشعاع الساقط . وبالمثل تعرف  $R$  كنسبة بين كثافة التيار المصاحبة للتيار المنعكس الى تلك المصاحبة للشعاع الساقط . رياضيا ،

$$T = \frac{J_{trans}}{J_{inci}} = \frac{(\hbar k_1/m) |F|^2}{(\hbar k_1/m) |A|^2} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left(\frac{F}{A}\right)^* \left(\frac{F}{A}\right) \quad \dots(4.2.20)$$

$$R = \frac{J_{ref}}{J_{inc}} = \frac{(\hbar k_1/m) |B|^2}{(\hbar k_1/m) |A|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{B}{A}\right)^* \left(\frac{B}{A}\right) \quad \dots(4.2.21)$$

كما يتطلب قانون حفظ الطاقة ما يلي

$$R + T = 1 \quad \dots(4.2.22)$$

من المعادلات (4.2.16) الى (4.2.19) نجد ان

$$\frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{16k_1^2k_2^2 \exp(2k_2L)}{(k_2^2 - k_1^2)^2 [1 - \exp(2k_2L)]^2 + 4k_1^2k_2^2 [1 + \exp(2k_2L)]^2} \quad \dots(4.2.23)$$

$$\frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_2^2 + k_1^2)^2 [1 - \exp(2k_2L)]^2}{(k_2^2 - k_1^2)^2 [1 - \exp(2k_2L)]^2 + 4k_1^2k_2^2 [1 + \exp(2k_2L)]^2} \quad \dots(4.2.24)$$

يصبح معامل النفاذ بعد التبسيط كما يلي

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_2^2 + k_1^2)^2 \sin^2 h^2 k_2 L + 4k_1^2k_2^2} \quad \dots(4.2.25)$$

بتعويض مقادير  $k_1, k_2$  في هذه المعادلة ، نحصل على التالي

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sin^2 h^2 k_2 L}{4E(V-E)}} = \left[ 1 + \frac{V^2 \sin^2 h^2 k_2 L}{4E(V-E)} \right]^{-1} \quad \dots(4.2.26)$$

كما يكون معامل الإنعكاس بالصورة التالية

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_2^2 + k_1^2)^2}{(k_2^2 + k_1^2)^2 + \frac{4k_1^2 k_2^2}{\sin^2 h^2 k_2 L}} \quad \dots(4.2.27)$$

بتعويض مقادير  $k_1, k_2$  في هذه المعادلة ، نحصل على التالي

$$R = \frac{V^2}{V^2 + \frac{4E(V-E)}{\sin^2 h^2 k_2 L}} = \left[ 1 + \frac{4E(V-E)}{V^2 \sin^2 h^2 k_2 L} \right]^{-1} \quad \dots(4.2.28)$$

نحصل على النهاية الكلاسيكية لمعاملات الإنعكاس والنفاذية بجعل  $h \rightarrow 0$  ، هذا يؤدي الى  $T \rightarrow 1$  ،  $R \rightarrow 0$  . اي ان احتمالية النفاذ تصبح صفرا وتكون احتمالية الإنعكاسية واحد، وهذا يعرف بالتنبؤ الكلاسيكي .

بفرض ان علو واتساع الحاجز كبيران جدا ،  $k_2 L \gg 1$  ، و  $\frac{1}{2} \exp(k_2 L) \rightarrow \sin h k_2 L$  ، يمكن اهمال الممقدار 1 في معادلة (4.2.26) ، ويصبح معامل النفاذ كما يلي

$$T = \frac{4E(V-E)}{V^2 \left( \frac{1}{2} \exp(k_2 L) \right)^2} = \frac{16E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) \exp(-2k_2 L),$$

حيث

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} \quad \dots(4.2.29a)$$

يكون الحد الأسي في معادلة (4.2.29a) سائدا بالنسبة للمعامل  $\frac{16E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right)$  الذي يمكن افتراض ان قيمته تساوي الواحد في اغلب التطبيقات . وبهذا التقريب يصبح احتمال النفاذ كما يلي

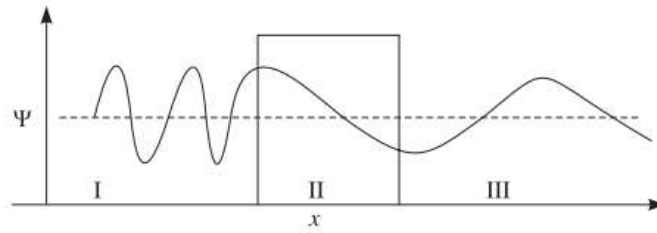
$$T \cong \exp(-2k_2 L) \quad \dots(4.2.29b)$$

يظهر التحليل الكمي الميكانيكي لمسألة حاجز الجهد ان هناك احتمالية محددة *finite probability* لحصول نفاذية للجسيم خلال الحاجز حتى وان كانت طاقة هذا الجسيم اقل من علو هذا الحاجز .

تعتمد احتمالية النفوذ للجسيم على (i) اتساع الحاجز  $L$  (ii) على الفرق  $(V-E)$  ، كما يظهر في الجدول التالي

E	V	L	$k_2 = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$	$2k_2L$	T
1 eV	4 eV	0.1 nm	$0.886 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$	1.772	0.17
1 eV	4 eV	0.2 nm	$0.886 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$	3.544	0.03
2 eV	4 eV	0.1 nm	$0.724 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$	1.448	0.23

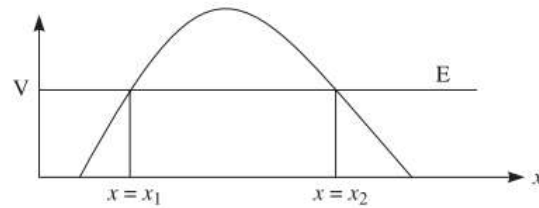
كما يمكن تمثيل دوال الموجة في المناطق الثلاثة كما في الشكل (4.2.2)



شكل (4.2.2) منحنيات دوال الموجة في مناطق حاجز الجهد .

في حالة حاجز الجهد متغير الإتساع ( العرض) والمبين في الشكل (4.2.3) ، تكون احتمالية النفوذ للجسيم خلال هذا الحاجز كما يلي

$$T \equiv \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V-E)} dx \right] \quad \dots(4.2.30)$$



شكل (4.2.3) حاجز جهد متغير الإتساع .

**حالة 2 :  $E > V$**

في هذه الحالة يصبح المقدار  $k_2 = \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$  تخيليا . لنفرض ان  $k_2 = i\beta$  ، حيث  $\beta =$

$$\sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

وتكون تعابير معامل النفاذ والانعكاس كما يلي

$$R = \frac{1}{1 + \frac{4E(E-V)}{V^2 \sin^2 \beta L}} = \left[ 1 + \frac{4E(E-V)}{V^2 \sin^2 \beta L} \right]^{-1} \quad \dots(4.2.31)$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V^2 \sin^2 \beta L}{4E(E-V)}} = \left[ 1 + \frac{V^2 \sin^2 \beta L}{4E(E-V)} \right]^{-1} \quad \dots(4.2.32)$$

نتناول دراسة الحالات التالية

(a) عندما تكون  $E \rightarrow V$ ,  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\sin \beta L \approx \beta L$  فإن معامل النفاذ يصبح كالتالي

$$T = \frac{1}{1 + \frac{mVL^2}{2h^2}} \quad \dots(4.2.33)$$

(b) تظهر معادلة (4.2.32) انه اذا زادت قيمة  $E$  عن قيمة  $V$ ، فإن احتمالية النفاذية  $T$  تصبح متذبذبة *oscillatory* بسبب حضور العامل  $\sin \beta L$  في هذه المعادلة. يصبح الحاجز شفافا ( $T=1$ ) اذا كان

$$\beta L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

او

$$\frac{2m(E-V)}{h^2} L^2 = n^2 \pi^2$$

$$L = n\lambda/2 \quad (4.2.34) \quad \text{او}$$

حيث  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}}$  وتساوي طول موجة دي برولي للجسيم .

هكذا ، اذا كان عرض حاجز الجهد يساوي المضاعفات الصحيحة لنصف طول موجة الجسيم فإن هذا الحاجز يصبح منفذا . وتسمى هذه الظاهرة بالتشتت الرنيني *resonance scattering* . ويحصل هذا الرنين عند قيم الطاقة  $E$  التي تعطى كما يلي

$$\beta^2 = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{2m(E-V)}{h^2}$$

او

$$E = V \left[ 1 + \frac{n^2 \pi^2 h^2}{2mVL^2} \right] \quad \dots(4.2.35)$$

كما نحصل على القيمة الصغرى لطاقة الجسيم الحركية T عند تحقق الشرط التالي

$$\sin \beta L = 1 \text{ or } \beta L = (2n+1)\pi/2, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

او

$$E = V \left[ 1 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{8mVL^2} \right] \quad \dots(4.2.36)$$

عند هذه القيمة من الطاقة الكلية (E) ، نجد ان قيمة T الصغرى تساوي ما يلي

$$T_{\min} = \left[ 1 + \frac{1}{\frac{4E}{V} \left( \frac{E}{V} - 1 \right)} \right]^{-1} \quad \dots(4.2.37)$$

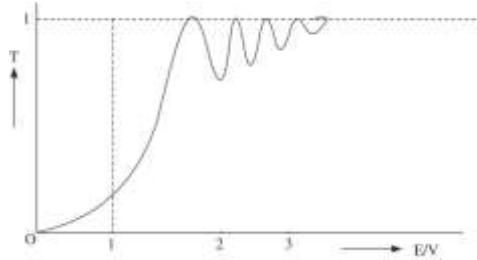
(c) عندما تكون قيمة E أقل من قيمة V ، فإن قيمة T تتناقص بشكل انفرادي . عندما يكون  $k_2L \gg 1$  ، تصبح الصيغة الرياضية للطاقة الحركية T كما يلي  $\sin hk_2L = \frac{1}{2} \exp(k_2L)$

$$T = \left[ 1 + \frac{V^2 \sin^2 k_2L}{4E(V-E)} \right]^{-1}$$

بحذف 1 من القوس ، نجد ان T تؤول الى المقدار التقريبي التالي

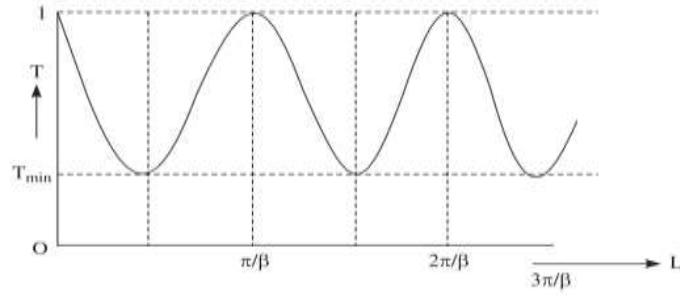
$$\cong \frac{4E(V-E)}{V^2 \left( \frac{1}{2} \exp k_2L \right)^2} = \frac{16E}{V} \left( 1 - \frac{E}{V} \right) \exp(-2k_2L). \quad \dots(4.2.38)$$

بيانيا ، يكون تغير T مع (E/V) كما هو مبين في الشكل (4.2.4)



شكل (4.2.4) تغير الطاقة الحركية T مع (E/V) .

يظهر تغير الطاقة الحركية T كدالة لعرض حاجز الجهد L في الشكل (4.2.5).

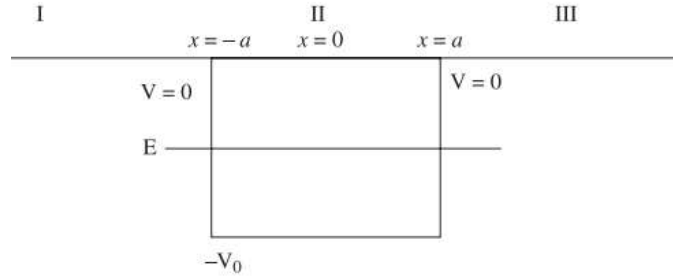


شكل (4.2.5) تغير الطاقة الحركية مع تغير اتساع جهد الحاجز.

### (4.3) جسيم في بئر جهد احادي البعد ومحدود العمق *Particle in a One- Dimensional Potential Well of Finite Depth*

لندرس حركة جسيم ما في بئر جهد احادي البعد والذي يكون معرفا كما يلي

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & x < -a \\ &= -V_0 & -a < x < a \\ &= 0 & x > a \end{aligned} \quad \dots(4.3.1)$$



شكل(4.3.1) بئر جهد احادي البعد بعمق  $V_0$ .

لنعتبر اولا الحالة التي يكون فيها الجسيم محصور كلاسيكيا خلال البئر ، اي ان ،  $-V_0 < E < 0$  . يمكن تقسيم مناطق المسموحة لحركة هذا الجسيم الى ثلاث مناطق : I, II, III . لنفرض ان دوال الموجة في تلك المناطق كما يلي:  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  على الترتيب . تكون معادلات شرودنجر في هذه المناطق كالتالي

#### I في المنطقة



$$x < -a, \quad \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0 \quad \dots(4.3.1a)$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} - k^2\psi_1 = 0 \quad \dots(4.3.1b)$$

حيث

$$k = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}, \text{ is a real positive quantity.} \quad \dots(4.3.2)$$

## II في المنطقة

$$-a < x < a, \quad \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m[E - (-V_0)]}{\hbar^2}\psi_2 = 0 \quad \dots(4.3.3a)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k_2^2\psi_2 = 0 \quad \dots(4.3.3b)$$

حيث

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}, \text{ is a real positive quantity.} \quad \dots(4.3.4)$$

## III في المنطقة

$$x > a, \quad \frac{d^2\psi_3}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3 = 0 \quad \dots(4.3.5)$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k^2\psi_3 = 0 \quad \dots(4.3.6)$$

وعليه ، يكون الحل العام لمعادلات شرودنجر في هذه المناطق كالتالي

$$x < -a, \quad \psi_1 = A_1 \exp(kx) + B_1 \exp(-kx) \quad \dots(4.3.7)$$

$$-a < x < a \quad \psi_2 = A_2 \sin k_2x + B_2 \cos k_2x \quad \dots(4.3.8)$$

$$x > a \quad \psi_3 = A_3 \exp(kx) + B_3 \exp(-kx) \quad \dots(4.3.9)$$

عند  $x \rightarrow -\infty$  ، فإن  $\exp(-kx) \rightarrow \infty$  ، ويكون هذا الحل غير مقبول . لذلك ، نجعل  $B_1 = 0$  . وبالمثل ، عند  $x \rightarrow \infty$  ، فإن  $\exp(kx) \rightarrow \infty$  ، ويكون هذا الحل غير مقبول . وعليه ، نجعل  $A_3 = 0$  .

وتصبح الحلول السابقة بالصورة التالية

$$x < -a, \quad \psi_1 = A_1 \exp(kx) \quad \dots(4.3.10)$$

$$-a < x < a \quad \psi_2 = A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x \quad \dots(4.3.11)$$

$$-a < x < a \quad \psi_3 = B_3 \exp(-kx) \quad \dots(4.3.12)$$

حيث ان شروط الإستمرارية على دوال الموجة ومشتقاتها عند الحدود  $x = \pm a$  هي

$$\psi_1(-a) = \psi_2(-a), \quad \psi_2(a) = \psi_3(a)$$

$$\psi_1'(-a) = \psi_2'(-a), \quad \psi_2'(a) = \psi_3'(a)$$

باستخدام هذه الشروط ، نحصل على المعادلات التالية

$$A_1 0 + A_2 \sin k_2 a + B_2 \cos k_2 a - B_3 \exp(-ka) = 0$$

$$-A_1 \exp(-ka) - A_2 \sin k_2 a + B_2 \cos k_2 a + B_3 0 = 0$$

$$A_1 0 - A_2 k_2 \cos k_2 a - B_2 k_2 \sin k_2 a + B_3 k \exp(-ka) = 0$$

$$A_1 k \exp(-ka) + A_2 k_2 \cos k_2 a + B_2 k_2 \sin k_2 a + B_3 0 = 0$$

يكون لهذه المجموعة من المعادلات المتجانسة ، والتي تحوي على اربعة معاملات مجهولة ، حلا فيزيائيا معتبرا اذا فقط تحقق الشرط التالي:

$$\exp(-2ka) \begin{vmatrix} \sin k_2 a & \cos k_2 a & -1 & 0 \\ -\sin k_2 a & \cos k_2 a & 0 & -1 \\ k_2 \cos k_2 a & -k_2 \sin k_2 a & k & 0 \\ k_2 \cos k_2 a & k_2 \sin k_2 a & & k \end{vmatrix} = 0$$

بما ان  $\exp(-2k_2 a) \neq 0$  ، نحصل على التالي

$$k_2^2 \sin k_2 a \cos k_2 a + k k_2 \sin^2 k_2 a - k k_2 \cos^2 k_2 a - k^2 \sin k_2 a \cos k_2 a = 0$$

أو

$$k_2 \sin k_2 a (k \sin k_2 a + k_2 \cos k_2 a) - k \cos k_2 a (k_2 \cos k_2 a + k \sin k_2 a) = 0$$

أو

$$(k \sin k_2 a + k_2 \cos k_2 a)(k_2 \sin k_2 a - k \cos k_2 a) = 0$$

بالقسمة على  $\cos^2 k_2 a$  ، نحصل على

$$(k \tan k_2 a + k_2)(k_2 \tan k_2 a - k) = 0 \quad \dots(4.3.13)$$

تتحقق هذه المعادلة اذا كان

$$k \tan k_2 a = -k_2$$

$$\text{or} \quad k = -k_2 \cot k_2 a \quad \dots(4.3.14)$$

$$\text{and} \quad k = k_2 \tan k_2 a \quad \dots(4.3.15)$$

حيث ان

$$k_2^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \quad \text{and} \quad -k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad k_2^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad k_2^2 = -k^2 + \mu^2 \quad \dots(4.3.16)$$

حيث

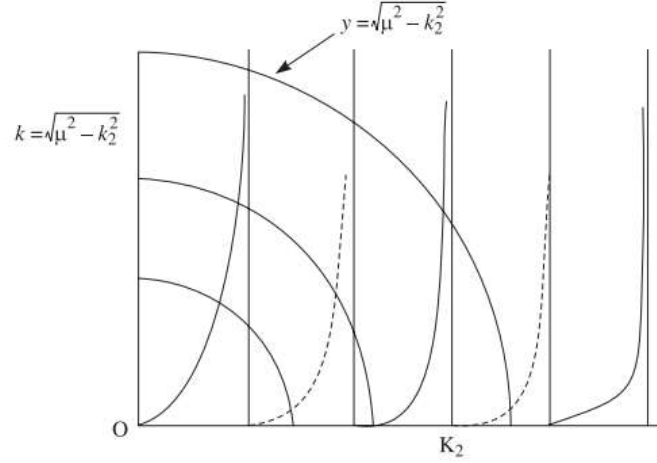
$$\mu^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \quad \dots(4.3.17)$$

مع ملاحظة ان  $\mu$  هي مقياس لعمق بئر الجهد . يمكن كتابة معادلات (4.3.14) و (4.3.15) كما يلي

$$k = \sqrt{\mu^2 - k_2^2} = -k_2 \cot k_2 a \quad \dots(4.3.18)$$

$$k = \sqrt{\mu^2 - k_2^2} = k_2 \tan k_2 a \quad \dots(4.3.19)$$

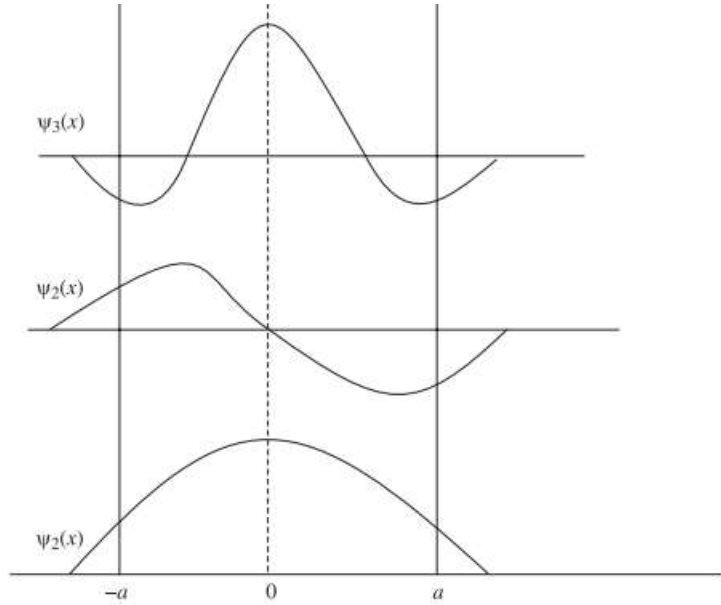
حيث من الصعب حل المعادلات (4.3.18، 4.3.19) جبريا ، لذلك نعلم على الطريقة البيانية لحل هذه المعادلات ، كما هو موضح في الشكل (4.3.2) .



شكل (4.3.2) قيم  $k_2$  المسموحة وقيم  $E$  تقابل نقاط تقاطع المنحنيين ( المتصلة والمتقطعة).

تكون الحلول ( قيم  $k_2$  المسموحة) للمعادلات (4.3.18-4.3.19) هي نقاط تقاطع المنحنيات الممثلة للدوال ( المنحنيات المتصلة )  $y = k_2 \tan k_2 a$  أو ( المنحنيات المتقطعة )  $y = -k_2 \cot k_2 a$  مع المنحنى  $y = \sqrt{\mu^2 - k_2^2}$  والذي يمثل دائرة نصف قطرها  $\mu$ . من الواضح ان قيم  $k_2$  المسموحة وكذلك قيم الطاقة الخاصة ( حيث العلاقة بينهما تعطى بالمعادلة التالية:  $E = \frac{\hbar^2}{2m} k_2^2 - V_0$  ) تشكل طيفا متقطعا  $discrete spectrum$ . كما يعتمد عدد قيم الطاقة الخاصة على عمق بئر الجهد. في حالة بئر الجهد الضحل،  $V_0 \rightarrow 0$ ، يكون نصف قطر الدائرة  $\mu \rightarrow 0$  ونحصل على نقطة تقاطع واحدة فقط، وعليه يكون فقط قيمة واحدة للطاقة الخاصة. ومع زيادة شدة الجهد ( عمق بئر الجهد)، يزداد عدد قيم الطاقة الخاصة.

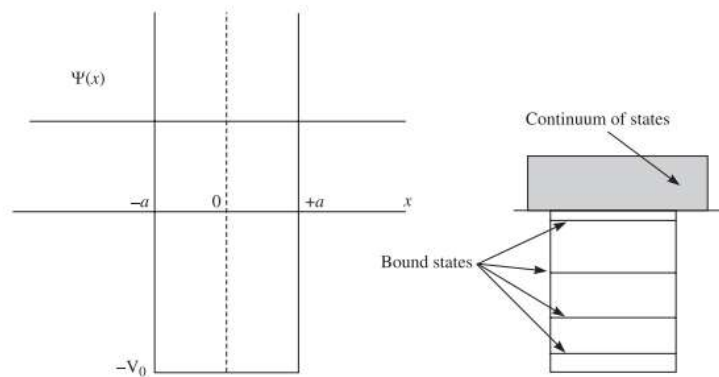
وبدون الدخول في تفاصيل حساب دوال الموجة المقابلة للطاقة المختلفة لجسيم في بئر جهد محدود العمق، تكون منحنيات هذه الدوال كما في الشكل (4.3.3). من الملاحظ ان دالة الموجة ككل قد تكون دالة زوجية او فردية للمتغير  $x$ . وهنا وتكون حالة الطاقة السفلى زوجية، والتالي لها فردية، وبعدها دالة زوجية، وهكذا على الترتيب. وهذا يعود الى كون دالة الجهد  $V(x)$  دالة زوجية للمتغير  $x$ .



شكل (4.3.3) دوال موجة الجسيم في بئر جهد محدود العمق ( $-V_0 < E < 0$ ).

كما يلاحظ امتداد دالة الموجة وراء حدود البئر ، اي ان هناك احتمالية محدودة لوجود الجسيم في المنطقة الممنوع كلاسيكيا خلف الحدود الفعلية لهذا البئر الجهدي . وتعرف هذه بظاهرة اختراق الحاجز *barrier penetration* .

في حالة  $E > 0$  ( الحالات غير المقيدة) تصبح دوال الموجة خارج البئر ذات طبيعة تذبذبية وتشبه تلك التي في داخل البئر وتشكل قيم الطاقة الخاصة طيفا متصلا *continuous spectrum* كما في الشكل (4.3.4)



شكل (4.3.4) حالات الطاقة لجسيم ( $E > 0$ ) في بئر جهد محدود العمق .

#### (4.4) نظرية انبعاث ألفا Theory of Alpha Decay

كلاسيكيا ، يتعذر تفسير انبعاث جسيمات ألفا من النويات المشعة ، بينما يعطي ميكانيكا الكم تفسيراً طبيعياً لهذه الظاهرة . في الحقيقة ، كان العالم جامو Gamow والعالمان كوندون Condon و جورني Gurney اول من وضعوا نظرية تتعلق بإنحلال ألفا في عام 1928 .

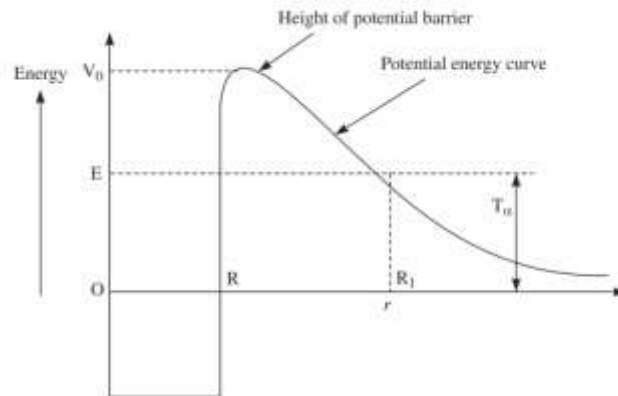
لنحاول اعطاء تفسيراً لهذه الظاهرة على ضوء الفيزياء الكلاسيكية . بالرغم من ان النويات تتكون من البروتونات والنيوترونات ، نستطيع اعتبار ان جسيم ألفا كياناً في هذه النواة . وعندما يكون هذا الجسيم خارج النواة ، فإنه يتعرض لقوة كولوم المنفرة وتكون الطاقة الكهروستاتيكية المقابلة كما يلي

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze2e}{r}; \quad r > R \quad \dots(4.4.1)$$

حيث R نصف قطر النواة ، Z العدد الذري للنواة الابنة ( بدون جسيم الفا ) ، كما تكون الطاقة V(r) المعطاة في معادلة (4.4.1) مساوية للشغل المبذول ضد مجال كولوم التنافري عندما يتم جلب جسيم ألفا من المالانهاية نحو النواة . وعندما يقترب جسيم ألفا من سحج النواة ، تزداد الطاقة الإلكتروستاتيكية لتصبح ذات قيمة عظيمة عند السطح  $r = R$  وتكون كالتالي في حالة نواة اليورانيوم

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{R} \approx 29 \text{ MeV for uranium nucleus} \quad \dots(4.4.2)$$

هذا يعطي ان القيمة الصغرى لطاقة جسيم ألفا حتى يخترق النواة . وبعبارة اخرى ، يكون جسيم ألفا المقرب من النواة بطاقة حركية اقل من V(R) لا يستطيع تسلق قوة كولوم التنافرية مما يجعله يرتد الى الخلف . يسمى مقدار طاقة الجهد V(R) **بارتفاع الحاجز barrier height** . يوضح الشكل (4.4.1) تغير طاقة الجهد V(r) لجسيم ألفا كدالة للمسافة r ( بعد الجسيم عن مركز النواة ) .



شكل (4.4.1) منحنى طاقة الجهد لجسيمات ألفا داخل وخارج النواة .

داخل النواة لا نعرف بالضبط شكل منحنى طاقة الجهد ، ولكن نعرف تحديدا ان القوى النووية قوية وجاذبة في طبيعتها وعليه يجب ان تكون طاقة الجهد المقابلة سالبة ويجب ان يكون منحنى طاقة الجهد على شكل حفرة انهدامية *dip* كما هو مبين في الشكل (4.4.1) . وهكذا تشكل القوى النووية القوية **بئر جهد** *potential well* . كلاسيكيا لا تستطيع جسيمات ألفا التي بداخل هذا البئر من الانفلات من النواة إلا اذا كانت طاقتها على الأقل تساوي ارتفاع حاجز الجهد .

لنفرض ان  $T_\alpha$  تمثل الطاقة الحركية لجسيم ألفا حيث تكون  $T_\alpha < V(R)$  . اذا كان جسيم ألفا مقتربا من النواة ، فإن كل طاقته الحركية تتحول الى طاقة جهد (وضع) عند نقطة  $r = R_1$  حيث يسكن هذا الجسيم لحظيا ويعود الى الخلف بفعل قوة كولوم التنافرية . وتسمى هذه النقطة بنقطة التحول الكلاسيكية *Turning point* . اذا كان جسيم ألفا بداخل النواة ، فإنه لا يملك الطاقة الكافية ليقفز عن ارتفاع الحاجز . هكذا لا يمكن لجسيم ألفا الوصول الى المنطقة المحصورة بين  $r = R$  الى  $r = R_1$  وتسمى هذه المنطقة **بسمك الحاجز** *barrier thickness* .

النتيجة المستخلصة من وجهة النظر الكلاسيكية هي ان جسيم ألفا الذي يملك طاقة اقل من ارتفاع الحاجز لا يمكنه الهروب من النواة وهذا لا يتفق مع المشاهدة العملية . على سبيل المثال ، تكون طاقة جسيمات ألفا المنبعثة من نواة اليورانيوم اقل من 10Mev ، ويكون هذا المقدار اقل من ارتفاع الحاجز الذي يعادل 29Mev (معادلة 4.4.2).

من جهة اخرى ، يعطي ميكانيكا الكم تفسيراً مباشراً لنشاط ألفا من خلال الميزات المركزية لنظرية الكم وهي :

(i) يتواجد جسيم ألفا كوحدة واحدة في النواة.

(ii) يكون جسيم الفا في حالة حركة ثابتة متأرجحا الى الأمام والخلف بين جدران الحاجز . وفي كل تصادم مع الجدار يوجد احتمالية محدودة لتسرب الجسيم خلال حاجز الجهد .

لنفرض ان  $f$  هي تردد تصادم جسيم ألفا مع الجدار في محاولة الهروب من النواة و  $T$  هي احتمالية النفوذ في كل تصادم ، تكون احتمالية الإنحلال *decay probability* ( $\lambda$ ) كالتالي

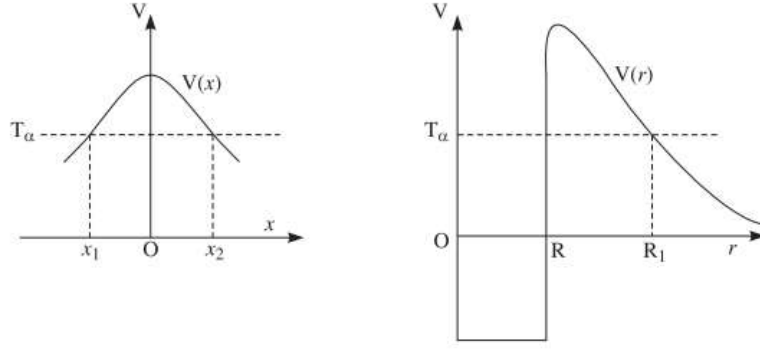
$$\lambda = fT$$

بدلالة سرعة جسيم ألفا  $v$  ونصف قطر النواة  $R$  يكون تردد التصادم كما يلي

$$f = v/2R$$

تعطى احتمالية النفوذ  $T$  للجسيم كدالة للطاقة الحركية  $T_\alpha$  في حاجز جهد المبين في الشكل (4.4.2) بالعلاقة التالية

$$\ln T = -2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V - T_\alpha)} dx$$



شكل (4.4.2) دالة حاجز جهد مع طاقة حركة جسيم الفا .

بتطبيق هذه النتيجة على مسألة انحلال الفا ، نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned} \ln T &= -2 \int_R^{R_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - T_\alpha \right)} dr \\ &= -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} \int_R^{R_1} \sqrt{\left( \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 T_\alpha r} - 1 \right)} dr \end{aligned}$$

باستخدام فرضية ان عند  $r = R_1$  تكون  $V = T_\alpha$  ، نحصل على التالي

$$\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} = T_\alpha$$

ويتبع ذلك ،

$$R_1 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 T_\alpha} \quad \dots(4.4.3)$$

اذن ،

$$\ln T = -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} \int_R^{R_1} \sqrt{\left( \frac{R_1}{r} - 1 \right)} dr \quad \dots(4.4.4)$$

لتبسيط التكامل في هذه المعادلة نستخدم التعويض التالي



$$r = R_1 \cos^2 \theta, \quad dr = -2 R_1 \cos \theta \sin \theta d\theta$$

ونحصل على التالي

$$\ln T = -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} \cdot R_1 \int_0^\beta 2 \sin^2 \theta d\theta$$

حيث

$$\beta = \cos^{-1} \sqrt{R/R_1}$$

$$\begin{aligned} \ln T &= -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} R_1 \int_0^\beta (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} R_1 \left[ \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\beta \\ &= -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} R_1 \left[ \theta - \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \right]_0^\beta \\ &= -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} R_1 \left[ \cos^{-1} \sqrt{\frac{R}{R_1}} - \sqrt{\frac{R}{R_1}} \sqrt{1 - \frac{R}{R_1}} \right] \quad \dots(4.4.5) \end{aligned}$$

الآن سنستخدم بعض التقريبات ، والتي تكون صالحة في حالة الحاجز السميك .

$$\cos^{-1} \sqrt{\frac{R}{R_1}} = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{R}{R_1}} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{R_1}} \quad \text{and} \quad \left(1 - \frac{R}{R_1}\right)^{1/2} \approx 1$$

وعليه ،

$$\ln T = -2 \sqrt{\frac{2mT_\alpha}{\hbar^2}} R_1 \left[ \frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{R}{R_1}} \right] \quad \dots(4.4.6)$$

بتعويض قيم  $R_1$  من المعادلات (4.4.3) في معادلة (4.4.6) ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} \ln T &= \frac{4e}{\hbar} \frac{m}{\pi \epsilon_0} \sqrt{ZR} - \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \frac{e^2}{\hbar \epsilon_0} \right) ZT_\alpha^{-1/2} \\ &= a\sqrt{ZR} - bZT_\alpha^{-1/2} \end{aligned}$$

حيث تكون قيم الثوابت  $a, b$  كالتالي

$$a = \frac{4me}{\pi\hbar\epsilon_0}, \quad b = \frac{e^2}{\epsilon_0\hbar}\sqrt{m/2}$$

تكون احتمالية الإنحلال  $\lambda$  كما يلي

$$\lambda = fT = \left(\frac{v}{2R}\right)T$$

$$\therefore \ln \lambda = \ln\left(\frac{v}{2R}\right) + \ln T$$

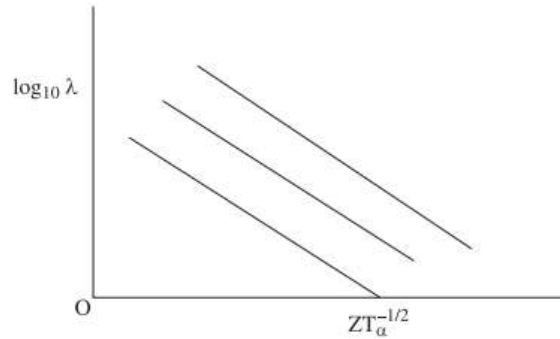
$$= \ln\left(\frac{v}{2R}\right) + a\sqrt{ZR} - bZT_\alpha^{-1/2}$$

$$\log_{10} \lambda = \log_{10}\left(\frac{v}{2R}\right) + 0.4343a\sqrt{ZR} - 0.4343bZT_\alpha^{-1/2} \quad \dots(4.4.7)$$

لعدد من بواعث جسيم ألفا ، يمكن تخطيط المعادلة (4.4.7) كما في الشكل (4.4.3) . تكون العلاقة البيانية خط مستقيم ميله  $-0.4343b$  . ويكون تقاطع هذا الخط مع المحور الصادي عند القيمة التالية

$$\log_{10}\left(\frac{v}{2R}\right) + 0.4343a\sqrt{ZR}$$

كما يمكن استخدام هذه القيمة لإيجاد نصف قطر النواة  $R$  . كما وجد ان هذه القيمة المحسوبة لنصف القطر تكون من نفس رتبة القيم التي يتم الحصول عليها من تجارب تشتت جسيمات ألفا .



شكل (4.4.3) منحنى المعادلة (4.4.7)

## تمارين

(1) يسقط جسيم كتلته  $m$  وطاقته الكلية  $E$  على حاجز جهد مستطيل ذي بعد احادي ارتفاعه  $V > E$  ويسمك محدود  $a$ . برهن ان هذا الجسيم يملك احتمالية محدودة لإختراق هذا الحاجز والتواجد في الجانب الآخر من الحاجز. جد معامل النفاذية .

(2) (a) يسقط جسيم كتلته  $m$  وطاقته الكلية  $E$  على حاجز جهد درجي احادي البعد ارتفاعه  $V_0$  من اليسار نحو اليمين. ناقش سلوك الجسيم في حالة  $E < V_0$ ، ثم وضح كيفية حدوث ظاهرة التسلل ( النفق ) بدون الإخلال بمبدأ حفظ الطاقة .

(b) ناقش حدوث ظاهرتين فيزيائيتين واللذان يمكن فهمهما على اساس ظاهرة التسلل .

(3) يتحرك شعاع من الجسيمات ذات كتلة  $m$  وطاقة  $E$  في منطقة ذات طاقة جهد صفري وتقترب هذه الجسيمات من حاجز جهد مستطيل عرضه  $a$  وارتفاعه  $V_0$  حيث  $V_0 > E$ . اذا كانت

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

برهن ان معامل النفاذ يعطى بالعلاقة التالية

$$T = \frac{16}{V_0} E \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2\beta a}$$

(4) (a) يسقط شعاع من الجسيمات ذات كتلة  $m$  وطاقة  $E$  على حاجز جهد درجي ارتفاعه  $V$ . جد معاملات الإنعكاس والنفاذ وناقش سلوك الجسيمات في منطقة الجوار  $E \sim V$ .

(b) اعط ثلاثة امثلة على ظاهرة التسلل (النفق) الكمي.

(5) يسقط شعاع من الجسيمات ذات كتلة  $m$  وطاقة  $E$  على حاجز جهد درجي ارتفاعه  $V_0$  من اليسار نحو اليمين .

ناقش الحل للحالة  $E < V_0$ .

(6) يتحرك جسيم كتلته  $m$  بشكل حر في خط مستقيم من الموقع  $x = -a$  ليسقط على حاجز جهد معرف كما يلي

$$V(x) = 0, \text{ for } x < -a, \text{ and } x > a, \\ = V_0 \text{ for } -a < x < a$$

اذا كان  $E < V_0$  فإن

(a) برهن انه يوجد احتمالية غير صفرية لنفاذ الجسيم من خلال الحاجز ثم جد معامل النفاذ.

(b) برهن ان في حالة الإتساع والعلو الكبيرين فإن معامل النفاذ يؤول الى التالي

$$T \approx e^{-2ka} \text{ where } k^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

---

## Formulation of Quantum Mechanics

يتناول هذا الفصل اشتقاق القيم الذاتية لمربع الزخم الخطي ومسقط هذا الزخم على محور z- باستخدام الإحداثيات الكروية لموقع الجسيم . كذلك يعرض الفرضيات المشكلة لقوانين الميكانيكا الكمية . كما يدخل الرموز التأسيسية لديرانك في هذه القوانين .

$$(5.1) \text{ القيم الذاتية والدوال الذاتية للمؤثرات } \hat{L}^2 \text{ و } \hat{L}_z$$

### Eigen Values and Eigen Function of $\hat{L}^2$ ، $\hat{L}_z$

حيث ان مربع الزخم الزاوي  $L^2$  ومركبته في اتجاه محور z هي مشاهدات متوافقة *compatible observables* وكذلك تكون مؤثراتهما  $\hat{L}_z$  ،  $\hat{L}^2$  متبادلة ، اي ،  $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$  ، لذلك يكون لهما دالة ذاتية مشتركة . عندما نحاول ايجاد حل لمعادلة القيم الذاتية باستخدام الصيغة الكارتيزية لهذه المؤثرات ، تكون المعادلة التفاضلية التي نحصل عليها غير قابلة للفرز . لهذا السبب نستعمل الأحداثيات الكروية . لنفرض ان الدالة الذاتية للمؤثرات هي  $Y(\theta, \varphi)$  ، تكون معادلات القيم الذاتية لهذه المؤثرات كما يلي

$$\hat{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \lambda \hbar^2 Y(\theta, \varphi) \quad \dots(5.1.1)$$

$$\hat{L}_z Y(\theta, \varphi) = m \hbar Y(\theta, \varphi) \quad \dots(5.1.2)$$

حيث  $\lambda \hbar^2$  و  $m \hbar$  هي القيم الذاتية للمؤثرات  $\hat{L}^2$  ،  $\hat{L}_z$  على الترتيب . في حالة استخدام الإحداثيات الكروية يمكن التعبير عن هذه المؤثرات كالتالي

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad \dots(5.1.3)$$

$$\hat{L}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \dots(5.1.4)$$

بتطبيق المعادلات (5.1.3) ، (5.1.4) ، (5.1.1) ، (5.1.2) الى الصورة التالية

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \lambda \right] Y(\theta, \varphi) = 0 \quad \dots(5.1.5)$$

$$\frac{dY(\theta, \varphi)}{d\varphi} = im\varphi$$

دعنا نحاول فرز المتغيرات  $\varphi$  ،  $\theta$  بإفتراض ما يلي

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad \dots(5.1.6)$$

بتعويض المعادلة (5.1.6) في المعادلة (5.1.5) ، نجد ان

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad \dots(5.1.7)$$

نلاحظ ان الطرف الأيسر في معادلة (5.1.7) هو دالة للمتغير  $\theta$  فقط ، كما ان الطرف الأيمن في هذه المعادلة دالة للمتغير  $\varphi$  فقط ، وهذان المتغيران مستقلان . كما ان هذه المعادلة تكون صحيحة اذا فرضنا ان كل طرف فيها يساوي عدد ثابت ، ولنرمز له  $m^2$  . وهكذا يتم فرز هذه المعادلة الى معادلتين هما

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad \dots(5.1.8)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad \dots(5.1.9)$$

يمكن تكامل معادلة (5.1.8) لنحصل على التالي

$$\Phi(\varphi) = C e^{im\varphi} \quad \dots(5.1.10)$$

حيث  $C$  ثابت . بما ان  $\Phi(\varphi)$  منفردة القيمة ، هذا يستوجب ان يكون ما يلي

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi + 2\pi)}$$

$$e^{2m\pi i} = 1$$

$$m = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \dots(5.1.11)$$

تحدد قيمة الثابت  $C$  في المعادلة (5.1.10) بإستعمال شرط المعايرة التالي

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(\varphi)|^2 d\varphi = 1$$

$$C^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

وعليه ، يكون الحل المعيير لمعادلة -  $\varphi$  كما يلي

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \dots(5.1.12)$$

وهذا يحدد الدالة الذاتية والقيمة الذاتية لمركبة الزخم الزاوي المداري في اتجاه محور z- .

لحل معادلة  $\theta$  ، من البساطة ان نحول المعادلة الى معادلة جديدة بدلالة متغير مستقل آخر كالتالي :

نفرض ان

$$x = \cos \theta, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin \theta, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx}$$

بدلالة المتغير  $x$  ، تصبح معادلة  $\theta$  على النحو التالي

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left[ \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta(x) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \dots(5.1.13)$$

تعرف معادلة (5.1.13) بمعادلة **ليجنדר المرافقة** *associated Legendre equation* . ويعبر عن حل هذه المعادلة بدلالة كثيرات الحدود المسماة **بكثيرات حدود ليجنדר** *associated Legendre polynomials* .

فمثلا عند  $m = 0$  ، تؤول معادلة (5.1.13) الى معادلة بسيطة نسبيا ، تعرف بمعادلة ليجنדר ويعبر عن حلها بدلالة كثيرات حدود ليجنדר *Legendre polynomials* ويرمز لها بالرمز  $P_l(x)$  . لنعبر ان  $\Theta(x) = P(x)$  .

وعليه ، تكون معادلة ليجنדר على النحو التالي

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \lambda P(x) = 0 \quad \dots(5.1.14a)$$

او

$$(1-x^2) \frac{d^2P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \lambda P = 0 \quad \dots(5.1.14b)$$

لنجرّب حل معادلة (5.1.14) بطريقة متسلسلة القوى على النحو التالي

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l \quad \dots(5.1.15)$$

بتعويض معادلة (5.1.15) في معادلة (5.1.14) ، نحصل على التالي

$$\sum_{l=0}^{\infty} l(l-1)a_l x^{l-2} - \sum_{l=0}^{\infty} l(l-1)a_l x^l - 2 \sum_{l=0}^{\infty} l a_l x^l + \lambda \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^l = 0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} l(l-1)a_l x^{l-2} - \sum_{l=0}^{\infty} [l(l+1) - \lambda] a_l x^l = 0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(l+2)a_{l+2} x^l - \sum_{l=0}^{\infty} [l(l+1) - \lambda] a_l x^l = 0 \quad (\text{Replacing } l \text{ by } l+2)$$

تكون هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم  $x$  ( $-1 < x < 1$ ) . هذا يكون ممكنا اذا فقط كان معامل كل حد من قوى  $x$  يساوي صفرا. و عليه ، نجد ان

$$a_{l+2} = \frac{l(l+1) - \lambda}{(l+1)(l+2)} a_l \quad (\text{Recursion relation}) \quad \dots(5.1.16)$$

تعرف المعادلة (5.1.16) بالعلاقة الإسترجاعية (العودية) *recursion relation* . على سبيل المثال ، لقيم  $l(0,2,4, \dots)$  الزوجية تعطي معادلة (5.1.16) ما يلي

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2!} a_0$$

$$a_4 = -\frac{\lambda(6-\lambda)}{4!} a_0$$

$$a_6 = -\frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!} a_0 \text{ etc.}$$

بينما لقيم  $l(1,3,5, \dots)$  الفردية ، نحصل على



$$a_3 = \frac{2-\lambda}{3!} a_1$$

$$a_5 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!} a_1$$

$$a_7 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!} a_1 \text{ etc.}$$

وعليه ، يكون حل معادلة ليجندر بدلالة الثابتين المطلقين  $a_0, a_1$  كالتالي

$$P(x) = a_0 \left[ 1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!} x^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!} x^6 - \dots \right] \\ + a_1 \left[ x + \frac{(2-\lambda)}{3!} x^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{5!} x^5 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)(30-\lambda)}{7!} x^7 + \dots \right] \dots (5.1.17)$$

#### ملاحظة

تتباعد  $P(x)$  عند  $x = \pm 1$  ، يكون مجال التقارب عند  $-1 < x < 1$  . يتألف حل معادلة (5.1.17) من متسلسلتين مستقلتين وغير محدودتين ، احدهما تتكون من معاملات  $a_0$  الزوجية والأخرى من معاملات  $a_1$  الفردية . هكذا اذا كانت المتسلسلة (5.1.17) غير منتهية فإنها تتباعد عند  $x = 1$  ، وهذا الحل يكون غير مقبول . ولتجنب انفرادية  $P(x)$  عند  $x = 1$  ، يجب ان تنتهي متسلسلة (5.1.17) بعد عدد من الحدود .

لنفرض ان هذه المتسلسلة تنتهي لبعض قيم  $l$  الصحيحة . تعطي العلاقة الإسترجاعية (5.1.16) ما يلي

$$\lambda = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad \dots (5.1.18) \\ \lambda = 0, 2, 6, 12, 20, 30, \dots$$

اذا كان الأمر كذلك ، فإن احد المتسلسلتين تنتهي عند  $a_l x^l$  . وعليه ، من معادلة (5.1.1) ومعادلة (5.1.18) نرى ان شرط إنتهاء المتسلسلة هو الشرط الكمي لقيم  $\hat{L}^2$  الذاتية . وتكون القيم الذاتية لهذا المؤثر كالتالي

$$\lambda \hbar^2 = l(l+1) \hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

أو

$$\lambda = l(l+1) \quad \dots(5.1.19)$$

هذا يعني ان القيم المسموحة للزخم زاوي المداري L هي

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \dots(5.1.20)$$

لقيم  $l$  الزوجية ، تصبح المتسلسلة الزوجية كثيرة حدود  $polynomial$  ولكن المتسلسلة الفردية تبقى متسلسلة . لانهاية . لذلك نجعل المعامل  $a_1 = 0$  .

وبالمثل ، لقيم  $l$  الفردية ، تصبح المتسلسلة الفردية كثيرة حدود  $polynomial$  ولكن المتسلسلة الزوجية تبقى متسلسلة لانهاية . لذلك نجعل المعامل  $a_0 = 0$  .

لذلك تكون الحلول المقبولة لمعادلة ليجندر اما كثيرات حدود زوجية او كثيرات حدود فردية ويمكن التعبير عنها كالتالي

$$P_l^{\text{even}}(x) = a_0 \left[ 1 - \frac{\lambda}{2!} x^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{4!} x^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{6!} x^6 - \dots \right]$$

أو

$$P_1^{\text{odd}}(x) = a_1 x, \quad P_3^{\text{odd}}(x) = a_1 \left( x - \frac{5}{3} x^3 \right), \quad P_5^{\text{odd}}(x) = a_1 \left( x - \frac{14}{3} x^3 + \frac{63}{15} x^5 \right) \dots \text{etc.}$$

ومن هذه الكثيرات الحدودية نحصل على التالي

$$P_0^{\text{even}}(x) = a_0, \quad P_2^{\text{even}}(x) = a_0(1 - 3x^2), \quad P_4^{\text{even}}(x) = a_0 \left( 1 - 10x^2 + \frac{35}{3} x^4 \right), \text{ etc.}$$

$$P_1^{\text{odd}}(x) = a_1 x, \quad P_3^{\text{odd}}(x) = a_1 \left( x - \frac{5}{3} x^3 \right), \quad P_5^{\text{odd}}(x) = a_1 \left( x - \frac{14}{3} x^3 + \frac{63}{15} x^5 \right) \dots \text{etc.}$$

يتم تعيين الثوابت  $a_1, a_1$  باستخدام الشروط  $P_l(1) = 1$  .

وعليه ،

$$P_0(1) = 1 \Rightarrow a_0 = 1, P_2(1) = 1 \Rightarrow a_0 = -1/2, P_4(1) = 1 \Rightarrow a_0 = 3/8 \text{ etc.}$$

$$P_1(1) = 1 \Rightarrow a_1 = 1, P_3(1) = 1 \Rightarrow a_1 = -3/2, P_5(1) = 1 \Rightarrow a_1 = 15/8 \text{ etc.}$$

بإدخال القيم المناسبة للمعاملات  $a_0, a_1$  تكون كثيرة حدود ليجندر كالتالي

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = (1/2)(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = (1/8)(63x^5 - 70x^3 + 15x) \text{ etc.}$$

ايضا ، يمكن الحصول كثيرة حدود ليجندر من قانون عام يسمى *قانون رودريجز Rodrigues formula* ويكون بالشكل التالي

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l (l!)} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad \dots(5.1.21)$$

يكون شرط التعامد لكثيرة حدود ليجندر كما يلي

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_r(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lr} \quad \dots(5.1.22)$$

نتناول حل معادلة ليجندر في الحالات التالية

(i) عندما تكون  $m = 0$ ، يمكن كتابة حل معادلة ليجندر كالاتي

$$\Theta_l(x) = N_l P_l(x) \quad \dots(5.1.23)$$

حيث  $N_l$  ثابت يتم تعيينه باستخدام شرط المعايرة التالي

$$\int_{-1}^1 |\Theta(x)|^2 dx = 1$$

$$N_l^2 \int_{-1}^1 |P_l(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow N_l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}$$

وعليه ، يكون حل معادلة ليجندر المعايير كما يلي

$$\Theta_l(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) \quad (5.1.24)$$

(ii) عندما  $m \neq 0$  ، يكون حل معادلة معادلة ليجندر المرافقة لقيم  $m$  الموجبة هو كثيرات حدود ليجندر المرافقة التي يرمز لها بالرمز  $P_l^m(x)$  ويعبر عنها رياضيا كما يلي

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \\ &= \frac{1}{2^l (l!)} \cdot (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \end{aligned} \quad \dots(5.1.25)$$

من تعريف  $P_l^m(x)$  يكون من الواضح ان  $m \leq l$  . بينما تتلشى  $P_l^m(x)$  للقيم  $m \geq l$  . بدلالة ثابت المعايرة  $N_{lm}$  يمكن التعبير عن حل معادلة ليجندر المرافقة كالتالي

$$\Theta_{lm}(x) = N_{lm} P_l^m(x) \quad \dots(5.1.26)$$

كما يعين الثابت  $N_{lm}$  باستخدام شرط المعايرة التالي

$$\int_{-1}^1 |\Theta(x)|^2 dx = 1 \quad \dots(5.1.27)$$

يقيم هذا التكامل بإستعمال النتيجة التالية

$$\int_{-1}^1 |P_l^m(x)|^2 dx = \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad \dots(5.1.28)$$

من المعادلات (5.1.27) و (5.1.28) ، نحصل على التالي

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad \dots(5.1.29)$$

وعليه ، تكون كثيرة حدود ليجندر المرافقة المعيرة لأي قيمة من قيم  $m, l$  كما يلي

$$\Theta_{lm}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(x), \quad x = \cos \theta \quad \dots(5.1.30)$$

حيث

$$l = 0, 1, 2, 3 \dots \dots \dots, \quad |m| \leq l$$

وعليه ، تكون الدوال الذاتية المعاييرة للمؤثر  $\hat{L}^2$  كما يلي

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta, \varphi) &= \Theta_l^m(\theta) \Phi(\varphi) \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} \quad \dots(5.1.31) \end{aligned}$$

لقيم  $m$  السالبة ، نحصل على

$$Y_{l,-m} = (-1)^m [Y_{l,m}]^* \quad \dots(5.1.32)$$

تسمى الدوال  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  بالتوافقات الكروية *spherical harmonic* ، وتكون الصيغ الرياضية لبعض هذه الدوال على النحو التالي

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{i\varphi},$$

$$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{-i\varphi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\sin \theta \cdot \cos \theta) \cdot e^{i\phi}, Y_{2,-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\sin \theta \cdot \cos \theta) \cdot e^{-i\phi}$$

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cdot e^{2i\phi}, Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cdot e^{-2i\phi}$$

### • التضاعفية Degeneracy

لأي قيمة عامة من  $l$  ، فإن  $m$  يكون لها عدد صحيح من القيم ابتداء من  $-l$  الى  $+l$  بتزايد مقداره خطوة الوحدة ، اي ان عدد هذه القيم يساوي  $(2l+1)$  . هكذا يوجد  $2l+1$  دالة ذاتية مختلفة كل منها يقابل قيمة ذاتية منفردة قدرها يساوي  $\sqrt{l(l+1)}\hbar$  من الزخم الزاوي المداري  $L$  . وتكون عدد هذه القيم الذاتية لأي  $l$  يساوي  $(2l+1)$  طوية مضاعفة *fold degenerate* .

### (5.2) الصياغات الفرضية لميكانيكا الكم *Axiomatic Formulation of Quantum Mechanics*

يعتمد نهج ميكانيكا الكم على بضع فرضيات *postulates* ، والتي تصاغ بدلالة مفاهيم مجهرية مجردة ولذلك يكون من الصعب تكوين صور موضحة لهذه المفاهيم كما هو الحال في فرضيات الديناميكا الحرارية التي تصاغ بدلالة متغيرات عيانية كالضغط ، الحرارة ، الحجم والطاقة ، حيث يكون من السهل ادراكها .

#### ❖ فرضية 1

توصف حالة النظام الميكانيكي الكمي بدالة موجة  $\psi(r, t)$  . وتشمل هذه الدالة كل المعلومات عن طبيعة هذا النظام . ويشكل تجمع هذه الدوال فضاء من المتجهات الخطية لانهاية الأبعاد ، ويعرف هذا الفضاء بفضاء هيلبرت *Hilbert space* .

إذا كانت  $\varphi_1, \varphi_2$  هما حالتين فيهما تملك الكمية الفيزيائية  $Q$  قيما محددة  $q_1, q_2$  على الترتيب ، فإن الترابط الخطي التالي  $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$  ، حيث  $c_1, c_2$  هي ثوابت مطلقة من الأعداد المركبة ، يعطي حالة ممكنة لهذا النظام ولكن تكون فيه الكمية الفيزيائية  $Q$  غير محددة القيمة ، اي يعطي قياس  $Q$  اما قيمة  $q_1$  او  $q_2$  . وعليه ، يعطي تركيب الحالتين نظاما جديدا تكون فيه  $Q$  غير محددة القيمة .

وعبارة اخرى ، يمكن تمديد قاعدة الترابط السابقة الى تركيب عدة حالات للنظام ، اي

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_m\varphi_m$$

ويكون الناتج ممثلا لحالة هذا النظام . كما يكون عكس قاعدة الترابط صحيحا ايضا . اي ، يمكن نشر اية دالة موجية مطلقة للنظام  $\psi$  بدلالة الحالات في فضاء هيلبرت لهذا النظام . وعليه ،

$$\Psi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \dots + c_m\phi_m = \sum_{m=1}^m c_m\phi_m \quad \dots(5.2.1)$$

حيث  $c_m$  اعداد مركبة مطلقة .

## ❖ فرضية 2

لكل خاصية فيزيائية يوجد مؤثر كمي ميكانيكي مقابل . يتم الحصول على المؤثر المقابل للخاصية الفيزيائية  $Q$  بواسطة كتابة التعبير الميكانيكي الكلاسيكي لهذه الخاصية ثم عمل التعويضات التالية

$$q \rightarrow \hat{q} = q, \quad p_q \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}, \quad \hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(q)$$

يقال ان المؤثر  $\hat{Q}$  هيرميتي اذا كانت قيمته المتوسطة ( المتوقعة ) حقيقية . لكل مؤثر هيرميتي يوجد معادلة القيم الذاتية التالية

$$\hat{Q}\phi_i = q\phi_i, \quad \dots(5.2.2)$$

حيث  $q$  القيمة الذاتية و  $\phi_i$  هي الدالة الذاتية للمؤثر .

تكون القيم الذاتية للمؤثر الهيرميتي حقيقية ، كما تكون الدالتان الذاتيتان اللتان تنتميان للقيم الخاصة المختلفة متعامدة

، اي

$$\int \phi_i^* \phi_j d\tau = \delta_{ij} \quad \dots(5.2.3)$$

كما تألف مجموعة الدوال الذاتية  $\phi_i$  مجموعة غير منتهية من الدوال الخطية المستقلة المتعامدة . اذا كانت هذه الدوال معايرة ، يقال انها تشكل مجموعة كاملة المتعامدة- المعايرة *orthonormal set* . هذا يعني ان اي دالة مطلقة  $\Psi$  للحالة يمكن ان نعبر عنها بتركيب من هذه المجموعة الكاملة ، او

$$\Psi = \sum_j c_j \phi_j \quad \dots(5.2.4)$$

اذا كان لدينا عدد كبير من الأنظمة المتشابهة ، كلها محضرة في نفس الحالة  $\Psi$  وتم قياس المتغير الديناميكي  $Q$  في كل نظام من هذه الأنظمة ، فإنه سيكون ناتج هذا القياس مختلفا . وسيكون متوسط القيمة المتوقعة للناتج كما يلي

$$\langle Q \rangle = \int \psi^* \hat{Q} \psi d\tau \quad \text{or} \quad \langle Q \rangle = (\psi, \hat{Q} \psi) \quad \dots(5.2.5)$$

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \sum_j \sum_k c_k^* c_j q_j \int \phi_k^* \phi_j d\tau \\ &= \sum_j \sum_k c_k^* c_j q_j \delta_{kj} \\ &= \sum_j |c_j|^2 q_j \quad \dots(5.2.6) \end{aligned}$$

هذا يعني ان  $|c_j|^2$  تمثل احتمالية ان تكون نتيجة القياس هي القيمة الذاتية  $q_j$  . من جهة اخرى اذا كان النظام في الحالة الممثلة بالدالة الذاتية  $\phi_k$  فإن قياس Q هو القيمة الذاتية  $q_k$  .

### ❖ فرضية 3

تكون مؤثرات المتغيرات الديناميكية ، في العموم، غير تبادلية ، اي ،

$$\hat{Q}\hat{R} \neq \hat{R}\hat{Q}$$

يسمى الفرق  $\hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q}$  بمتبادل  $\hat{Q}$  و  $\hat{R}$  ويرمز له  $[\hat{Q}, \hat{R}]$  ، او

$$[\hat{Q}, \hat{R}] = \hat{Q}\hat{R} - \hat{R}\hat{Q} \quad \dots(5.2.7)$$

### ❖ فرضية 4

يحكم التطور الزمني لحالة النظام  $\psi(x, y, z, t)$  معادلة شرودنجر في الحركة وهي

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(r, t) \quad \dots(5.2.8)$$

حيث H مؤثر هاملتون للنظام .

(5.3) تشكيل ديراك لميكانيكا الكم *Dirac Formalism of Quantum Mechanics*



ادخل ديراك لتمثل حالة النظام الديناميكي مفهوم المتجهات . حيث استخدم التسميتين : برا (*Bra*) و كيت (*ket*) وهما المقطعان الأول والأخير من الكلمة الإنجليزية *Bracket* التي تعني قوس . اذا كانت  $\psi$  تمثل دالة موجة حالة نظام كمي فإن ترميز ديراك للحالة يكون كما يلي

$$| \psi \rangle \leftrightarrow \text{ket}$$

وتشكل **متجهات كيت** فضاء اتجاهي خطي لانهائي الأبعاد، يعرف ب**فضاء هيلبرت**  $H$ . كما يوجد لكل متجه كيت متجه منفرد هو متجه برا ويعرف بالمتجه الإقتراني وتمثل حالة النظام في **فضاء برا** على النحو التالي

$$\langle \psi | \leftrightarrow \text{Bra}$$

وبالمثل ، تشكل **متجهات برا** فضاء هيلبرت المركب  $H^*$  complex .

كما يرمز متجهي كيت التاليين :  $|\alpha\rangle$  و  $\langle\alpha|$  ، حيث  $c$  عدد مركب ، لنفس الحالة الكمية . فيما يلي نورد خصائص متجهات الحالة .

### • خصائص متجهات الحالة *Properties of State Vectors*

1. اذا كان  $|\alpha\rangle$  و  $|\beta\rangle$  يمثلان حالتين فإن الترابط الخطي لهما  $c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle$  هو متجه كيت ويمثل حالة اخرى ايضا ، حيث  $c_1, c_2$  هي اعداد مركبة مطلقة.

2. يرمز لحاصل الضرب العددي لمتجه كيت ومتجه برا كما يلي  $\langle\beta|\alpha\rangle$  . اذا كان متجهي كيت  $|\psi\rangle$  و  $|\varphi\rangle$  يمثلان دالة الموجة  $\psi(r)$  ودالة الموجة  $\varphi(r)$  على انفراد فإن

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int \varphi^*(r)\psi(r)d\tau = \langle\psi|\varphi\rangle^*$$

3. يقال ان متجه برا صفريا اذا كان اذا كان حاصل الضرب العددي للمقدار  $\langle\beta|\alpha\rangle$  يساوي الصفر لأي متجه كيت  $|\alpha\rangle$  . او

$$\langle\beta| = 0, \text{ if } \langle\beta|\alpha\rangle = 0 \text{ for any } |\alpha\rangle.$$

4. يتساوى متجها برا التاليين  $\langle\beta_2|$  ،  $\langle\beta_1|$  اذا تحقق ما يلي

$$\langle\beta_1|\alpha\rangle = \langle\beta_2|\alpha\rangle \text{ for every } |\alpha\rangle.$$

5. اذا كان  $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$  ، عندئذ يقال ان  $|\alpha\rangle$  و  $|\beta\rangle$  متعامدة .

6. اذا كان  $\langle\alpha|\alpha\rangle = -1$  ، عندئذ يقال ان  $|\alpha\rangle$  معايير .

7. الضرب العددي لمتجهين يخضع للقاعدة التالية

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*,$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | \alpha \rangle^* \text{ implies that } \langle \alpha | \alpha \rangle \text{ is real.}$$

8. اذا كان  $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle$  فإن  $\langle \gamma | = \langle \alpha | + \langle \beta |$  ،

اذا كان  $|\delta\rangle = c|\alpha\rangle$  فإن  $\langle \delta | = c^* \langle \alpha |$  .

9. يحول المؤثر  $\hat{Q}$  كيت  $|\alpha\rangle$  الى كيت آخر  $|\beta\rangle$  ، اي

$$\hat{Q} |\alpha\rangle = |\beta\rangle \quad \text{or} \quad \langle \alpha | \hat{Q} = \langle \beta |$$

10. يقال ان المؤثر  $\hat{Q}$  خطي اذا كان

$$\hat{Q} (c_1 |\alpha_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle + \dots) = c_1 \hat{Q} |\alpha_1\rangle + c_2 \hat{Q} |\alpha_2\rangle + \dots$$

11. يرمز لملاصق المؤثر  $\hat{Q}$  بالرمز  $\hat{Q}^\dagger$  ويقرأ  $\hat{Q}$  داجر dagger ويعرف بالمعادلة التالية

$$\langle \alpha | \hat{Q}^\dagger | \beta \rangle = \langle \beta | \hat{Q} | \alpha \rangle^* \quad \dots(5.3.1)$$

### • فرضية التمدد *Expansion Postulate*

اذا كانت  $\{|\varphi_i\rangle\}$  تشير الى مجموعة تامة متعامدة ومعايرة من المتجهات الذاتية لمؤثر هيرميتي ، فإنه يمكن نشر الحالة  $|\psi\rangle$  بدلالة  $|\varphi_i\rangle$  . او

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle \varphi_i | \psi \rangle |\varphi_i\rangle = \sum_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i | \psi \rangle \quad \dots(5.3.2)$$

وهذا يؤدي الى

$$\sum_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i | = 1 \quad (\text{completeness rule}) \quad \dots(5.3.3)$$

وتكون معاملات التمدد  $\langle \varphi_i | \psi \rangle$  هي مساقط *projections*  $\psi$  على  $\varphi_i$  .

(5.4) التعريف العام للزخم الزاوي *General Definition of Angular Momentum*

وجدنا سابقا في هذا الفصل ان متجه الزخم الزاوي المداري يعطى بالعلاقة  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  وانه يمكن الحصول على المؤثر المقابل  $\hat{L}$  بإستبدال المشاهدات الكلاسيكية بمؤثراتها. كما وضحنا ان  $\hat{L}$  ومكوناته تحقق صحة العلاقات التبديلية التالية

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \quad \dots(5.4.1)$$

كما وجدنا ان القيم الذاتية للمؤثرات  $\hat{L}^2$  و للمؤثر  $\hat{L}_z$  هي على الترتيب كما يلي  $l(l+1)\hbar$  و  $m\hbar$  حيث  $m = -l, -l+1, \dots, (l-1), l$  ،  $l = 0, 1, 2, \dots$

كما هو معلوم ان الزخم الزاوي المغزلي ليس له مضاهي كلاسيكي وعليه لا يوجد له تعبير كلاسيكي لتمثيله. لذلك لا تعمل هذه الطريقة التي حصلنا عليها للمؤثر  $\hat{L}$  في حالة اعتبار اللف *spin*. اضافة لذلك ، تكون القيم الذاتية لمؤثر مكونات متجه اللف ( الغزل ) نصف عدد صحيح *half-integer*. سوف نتناول في هذا البند تعريف عام للزخم الزاوي .

لنعرف الزخم الزاوي  $J$  بمكوناته الثلاثة التالية:  $J_x, J_y, J_z$  كمشاهدة لها المؤثر الذي يحقق العلاقات التبديلية التالية

$$\begin{aligned} [\hat{J}_x, \hat{J}_y] &= i\hbar\hat{J}_z, & [\hat{J}_y, \hat{J}_z] &= i\hbar\hat{J}_x, & [\hat{J}_z, \hat{J}_x] &= i\hbar\hat{J}_y \\ [\hat{J}^2, \hat{J}_x] &= [\hat{J}^2, \hat{J}_y] = [\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0 \end{aligned} \quad \dots(5.4.2)$$

كما نعرف المؤثرات السلمية *ladder operators*  $\hat{J}_+, \hat{J}_-$  كالتالي

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \quad \dots(5.4.3)$$

ترتبط هذه المؤثرات تبادليا من خلال العلاقات التالية

$$\hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_-, \quad \hat{J}_-^\dagger = \hat{J}_+ \quad \dots(5.4.4)$$

كما تحقق المؤثرات السلمية صحة العلاقات التبديلية التالية

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = \hbar \hat{J}_+, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_-] = -\hbar \hat{J}_-, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_z, \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0 \quad \dots(5.4.5)$$

حيث

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \quad \dots(5.4.6)$$

كما تشتت العلاقات التبديلية بنفس الطريقة التي اشتقت بها العلاقات المقابلة للزخم الزاوي المداري . باستخدام المعادلة (5.4.3) ، يمكن اثبات العلاقات التالية .

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z, \quad \hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z \quad \dots(5.4.7)$$

بجمع الأطراف المتناظرة في معادلة (5.4.7) ، نجد ان

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_z^2 \quad \dots(5.4.8)$$

حيث ان  $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$  ، يكون من الممكن ايجاد مجموعة كاملة من الحالات الذاتية الانية للمؤثرات  $\hat{J}^2$  و  $\hat{J}_z$  . لنفرض ان هذه الحالات الذاتية التي تنتمي للقيم الذاتية  $\lambda_j \hbar^2$  للمؤثر  $\hat{J}^2$  و  $m \hbar$  للمؤثر  $\hat{J}_z$  هي  $|\lambda_j m \rangle$

. من الواضح ان

$$\hat{J}^2 |\lambda_j m \rangle = \lambda_j \hbar^2 |\lambda_j m \rangle \quad \dots(5.4.9)$$

$$\hat{J}_z |\lambda_j m \rangle = m \hbar |\lambda_j m \rangle \quad \dots(5.4.10)$$

الآن سوف نبرهن انه يوجد حد ادنى وحد اعلى للعدد الكمي  $m$  . وان قيمة مركبة المتجه لا يمكن ان تكون اكبر من قيمة المتجه نفسه ، اي

$$(m \hbar)^2 \leq \lambda_j \hbar^2 \Rightarrow m \leq \lambda_j \quad \dots(5.4.11)$$

هكذا لقيمة ثابتة من  $\lambda_j$  ، تكون قيمة  $m$  محصورة *bounded* . كما نستطيع الحصول على هذه النتيجة كما يلي

لا يمكن ان تكون القيمة المتوقعة للمؤثر الهيرميتي سالبة . لذلك ،

$$0 \leq \langle \lambda_j m | \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 | \lambda_j m \rangle$$

$$0 \leq \langle \lambda_j m | \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 | \lambda_j m \rangle$$

$$0 \leq \lambda_j \hbar^2 - m^2 \hbar^2$$

$$m^2 \leq \lambda_j$$

لنفرض ان قيم  $m$  العلوية والسفلية هي  $m_+$  و  $m_-$  . الآن

$$\begin{aligned} \hat{J}_z \hat{J}_+ | \lambda_j m \rangle &= (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+) | \lambda_j m \rangle \\ &= \hat{J}_+ (m+1) \hbar | \lambda_j m \rangle \\ &= (m+1) \hbar \hat{J}_+ | \lambda_j m \rangle \end{aligned} \quad \dots(5.4.12)$$

توضح معادلة (5.4.12) ان  $\hat{J}_+ | \lambda_j m \rangle$  هي حالة ذاتية للمؤثر  $\hat{J}_z$  منتمية للقيمة الذاتية  $(m+1)\hbar$  . لهذا السبب يقال ان  $\hat{J}_+$  مؤثر رافع *raising operator* : حيث ترفع القيمة الذاتية للمؤثر  $\hat{J}_z$  بمقدار وحدة من  $\hbar$  .

ولا يكون اي تأثير للمؤثر الرافع على القيمة الذاتية للمؤثر  $\hat{J}^2$  . بالمثل يمكن اثبات ان

$$\hat{J}_z \hat{J}_- | \lambda_j m \rangle = (m-1) \hbar \hat{J}_- | \lambda_j m \rangle \quad \dots(5.4.13)$$

وعليه ، يقال ان المؤثر  $\hat{J}_-$  مؤثر خافض *lowering operator* .

عند تطبيق هذه المؤثرات على الحالة الذاتية للزخم الزاوي ، تنخفض القيمة الذاتية للمؤثر  $\hat{J}_z$  بمقدار  $\hbar$  وتترك القيمة الذاتية للمؤثر  $\hat{J}^2$  دون تغيير . يمكن التعبير عن هذه النتائج كما يلي

$$\hat{J}_+ | \lambda_j m \rangle = C_+ | \lambda_j, m+1 \rangle \quad \dots(5.4.14)$$

$$\hat{J}_- | \lambda_j m \rangle = C_- | \lambda_j, m-1 \rangle \quad \dots(5.4.15)$$

حيث  $C_+$  و  $C_-$  ثوابت يتم تحديدها .

يكون تأثير  $\hat{J}_\pm$  هو رفع ( خفض ) القيمة الذاتية  $m\hbar$  بخطوة الوحدة . وبما ان اعلى قيمة ذاتية للمقدار  $m$  هي  $m_+$  وان اقل قيمة للمقدار هي  $m_-$  ، لذلك لا توجد الحالات التالية :  $|\lambda_j, m_+ + 1\rangle$  و  $|\lambda_j, m_- - 1\rangle$  .

وعليه ،

$$\hat{J}_+ |\lambda_j m_+ \rangle = 0 \quad \dots(5.4.16)$$

$$\hat{J}_- |\lambda_j m_- \rangle = 0 \quad \dots(5.4.17)$$

بتطبيق المؤثر  $\hat{J}_-$  على طرفي المعادلة (5.4.16) ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} \hat{J}_- \hat{J}_+ |\lambda_j m_+ \rangle &= 0 \\ (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) |\lambda_j m_+ \rangle &= 0 \\ \lambda_j \hbar^2 - m_+^2 \hbar^2 - m_+ \hbar^2 &= 0 \\ \lambda_j - m_+(m_+ + 1) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(5.4.18)$$

وبالمثل ، تطبيق المؤثر  $\hat{J}_+$  على طرفي المعادلة (5.4.17) ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \hat{J}_- |\lambda_j m_- \rangle &= 0 \\ (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) |\lambda_j m_- \rangle &= 0 \\ \lambda_j \hbar^2 - m_-^2 \hbar^2 + m_- \hbar^2 &= 0 \\ \lambda_j - m_-(m_- - 1) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(5.4.19)$$

من المعادلات (5.4.18) - (5.4.19) ، نحصل على التالي

$$m_+(m_+ + 1) = m_-(m_- - 1)$$

بما ان  $m_+ > m_-$  ، يجب ان نحصل على التالي

$$m_+ = -m_- = j \text{ (say)} \quad \dots(5.4.20)$$

تعرف معادلة (5.4.20) العدد الكمي  $j$  . بتعويض  $m_+ = j$  في معادلة (5.4.18) ، نجد ان

$$\lambda_j = j(j + 1) \quad \dots(5.4.21)$$

من معادلات (5.4.9) و (5.4.21) نلاحظ ان القيم الذاتية للمؤثر  $\hat{J}^2$  هي  $j(j+1)$  . كما ان الدوال الذاتية المنتمية لهذه القيمة الذاتية ولكن بقيم ذاتية مختلفة للمؤثر  $\hat{J}_z$  تكون كما يلي

$$|j, j\rangle, |j, j-1\rangle, |j, j-2\rangle, \dots, |j, -j+1\rangle, |j, -j\rangle$$

يؤدي التطبيق المتعاقب للمؤثر الخافض  $\hat{J}_-$  على الحالة  $|j, j\rangle$  نهائيا الى الحالة  $|j, -j\rangle$  . وبالمثل يؤدي التطبيق المتعاقب للمؤثر الخافض  $\hat{J}_+$  على الحالة  $|j, -j\rangle$  نهائيا الى الحالة  $|j, j\rangle$  . هذا يعني ان تكون الكمية

$$m_+ - m_- = j - (-j) = 2j$$

عدد صحيح *integer* . لذلك تكون القيم المسموحة للعدد الكمي  $j$  كما يلي

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

وعليه ، يمكن ان تكون قيم الزخم الزاوي اعدادا صحيحة و انصاف اعداد صحيحة معا .

إيجاد الحالات الذاتية للمؤثرات  $\hat{J}_z$  و  $\hat{J}^2$

تكون القيمة المتوقعة للمؤثر المزدوج  $\hat{J}_- \hat{J}_+$  في الحالة  $|j, m\rangle$  كما يلي

$$\langle jm | \hat{J}_- \hat{J}_+ | jm \rangle = \langle (\hat{J}_+) jm | \hat{J}_+ | jm \rangle$$

$$= |C_+|^2 \langle j, m+1 | j, m+1 \rangle$$

$$= |C_+|^2 \dots (5.4.22)$$

حيث استخدم شرط المعايرة التالي

$$\langle j, m+1 | j, m+1 \rangle = 1.$$

باستعمال النتيجة التالية :

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z$$

يمكن اعادة كتابة معادلة (5.4.22) على النحو التالي

$$\begin{aligned} \langle jm | \hat{J}_- \hat{J}_+ | jm \rangle &= \langle jm | \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z | jm \rangle \\ &= j(j+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 \\ &= [j(j+1) - m(m+1)]\hbar^2 \end{aligned} \dots (5.4.23)$$

من المعادلات (5.4.22) و (5.4.23) نحصل على

$$C_+ = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)} = \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)} \quad \dots(5.4.24)$$

بالمثل نجد ان

$$C_- = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)} = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)} \quad (5.4.25)$$

وعليه ، تصبح معادلات (5.4.14 - 5.4.15) كما يلي

$$\hat{J}_+ |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)} |j, m+1\rangle \quad \dots(5.4.26)$$

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)} |j, m-1\rangle \quad \dots(5.4.27)$$

نلاحظ من المعادلات (5.4.26 - 5.4.27) ان

$$\hat{J}_+ |j, j\rangle = 0, \quad \hat{J}_- |j, -j\rangle = 0$$

تكون كل العلاقات التي تم الحصول عليها لمؤثر الزخم الزاوي صحيحة للزخم الزاوي المداري  $\hat{L}$  و مؤثر الزخم الزاوي المغزلي  $\hat{S}$  . لنرمز الى الحالات الذاتية للمؤثرات  $\hat{L}_z$  ,  $\hat{L}^2$  , باستخدام ترميز ديراك  $|l, m\rangle$  وبالرمز  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  في التمثيل الإحداثي . يمكن التعبير عن المؤثرات الرافعة والخافضة  $\hat{L}_+$  ,  $\hat{L}_-$  في التمثيل الإحداثي كما يلي

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hbar e^{i\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hbar e^{-i\varphi} \left[ -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$$

في حالة الزخم الزاوي المداري تأخذ المعادلات (5.4.26-5.4.27) الصيغ التالية

$$\hat{L}_+ Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)} Y_{l,m+1}(\theta, \varphi) \quad \dots(5.4.28)$$

$$\hat{L}_- Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)} Y_{l,m-1}(\theta, \varphi) \quad \dots(5.4.29)$$

تستخدم هذه المعادلات للحصول على التوافقيات الكروية *spherical harmonics* لقيم  $l, m$  المختلفة .



• استعمال المؤثرات السلمية لإيجاد الدوال الذاتية للمؤثر  $\hat{L}^2$

نعرف ان لأي قيمة من قيم العدد الكمي المداري  $l$  ، تأخذ  $m$  القيم المحصورة بين  $-l$  الى  $+l$  وتكون متزايدة بخطوة الوحدة . كما نلاحظ من المعادلات (5.4.28) و (5.4.29) ان

$$\hat{L}_+ Y_{l,l} = 0 \quad \dots(5.4.30)$$

$$\hat{L}_- Y_{l,-l} = 0 \quad \dots(5.4.31)$$

كما نحصل من المعادلات (5.4.28) و (5.4.29) على التالي

$$Y_{l,m+1} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}} e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{l,m} \quad \dots(5.4.32)$$

$$Y_{l,m-1} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}} e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} - i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{l,m} \quad \dots(5.4.33)$$

اذا كانت  $m=0$  ، فإن حل معادلة ليجندر يكون كالتالي

$$Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad \dots(5.4.34)$$

كما نجد من معادلة (5.4.34) ما يلي

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} P_0(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \dots(5.4.35)$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot P_1(\cos \theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad \dots(5.4.36)$$

باستخدام معادلة (5.4.32) ، يمكن الحصول على صيغ الدوال التوافقية الكروية التالية

$$Y_{l,1}, Y_{l,2}, Y_{l,3}, \dots, Y_{l,l}$$

ومن المعادلة (5.4.33) نحصل على صيغ الدوال التوافقية التالية

$$Y_{l,-1}, Y_{l,-2}, Y_{l,-3}, \dots, Y_{l,-l}$$

وتحديدا ، عند  $l=1$  ، تكون  $m=1,0,-1$  ، نجد من معادلة (5.4.32) التالي

$$\begin{aligned}
Y_{1,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{10} \\
&= \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (\cos \theta) \\
&= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{i\varphi} \quad \dots(5.4.37)
\end{aligned}$$

ونجد من معادلة (5.4.33) ما يلي

$$\begin{aligned}
Y_{1,-1} &= \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{10} \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \cdot e^{-i\varphi} \quad \dots(5.4.38)
\end{aligned}$$

وبالمثل ، عند  $l=2$  ،  $m=2,1,0,-1,-2$  نجد ان

$$\begin{aligned}
Y_{2,1} &= \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{6}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[ \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \\
&= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\sin \theta \cdot \cos \theta) e^{i\varphi} \quad \dots(5.4.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,2} &= \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{21} \\
&= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta \cdot e^{2i\varphi} \quad \dots(5.4.40)
\end{aligned}$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot P_2(\cos \theta) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) \quad \dots(5.4.41)$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,-1} &= \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{6}} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{20} \\
&= \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{6}} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) \\
&= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot (\sin \theta \cdot \cos \theta) e^{-i\varphi} \quad \dots(5.4.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{2,-2} &= \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_{2,-1} \\
&= \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{4}} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot (\sin \theta \cdot \cos \theta) e^{-i\varphi} \\
&= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cdot \sin^2 \theta \cdot e^{-2i\varphi}
\end{aligned}$$

### (5.5) Parity التبادلية

التبادلية هي كمية ميكانيكية مكممة وليس لها مشابه كلاسيكي. وللوصول الى مفهوم التبادلية ، نتأمل سلوك دالة الموجة  $\Psi(x, y, z)$  عند عكس *inversion* المحاور الإحداثية ، اي ، عند عكس اتجاه كل المحاور مما يؤدي الى تغيير اشارات كل الإحداثيات وبالتالي تتحول الدالة  $\Psi(x, y, z)$  الى دالة جديدة هي  $\Psi(-x, -y, -z)$  . رياضيا ، يمكن اعتبار هذا الإنتقال كنتيجة لفعل مؤثر العكس الذي يرمز له بالرمز  $\hat{P}$  على تلك الدالة . او

$$\hat{P}\Psi(x, y, z) = \Psi(-x, -y, -z) \quad \dots(5.5.1)$$

بتطبيق هذا المؤثر مرة اخرى ، نحصل على التالي

$$\begin{aligned}
\hat{P}\hat{P}\Psi(x, y, z) &= \hat{P}\Psi(-x, -y, -z) = \Psi(x, y, z) \\
\hat{P}^2\Psi(x, y, z) &= \Psi(x, y, z) \quad \dots(5.5.2)
\end{aligned}$$

ويتبع ذلك ان يكون مربع مؤثر التبادلية يساوي الوحدة *unity* .

لتحديد القيم الذاتية لمؤثر العكس ، يجب حل المعادلة التالية

$$\hat{P}\psi(x, y, z) = \lambda\psi(x, y, z) \quad \dots (5.5.3)$$

$$\hat{P}\hat{P}\psi(x, y, z) = \lambda\hat{P}\psi(x, y, z)$$

$$\hat{P}^2\psi(x, y, z) = \lambda^2\psi(x, y, z)$$

$$\psi(x, y, z) = \lambda^2\psi(x, y, z) \quad \dots(5.5.4)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1 \quad \dots(5.5.5)$$

وعليه ، تكون القيم الذاتية لهذا المؤثر هي  $\{-1, +1\}$ . وعلى ضوء ذلك ، يمكن كتابة ما يلي

$$\hat{P}\psi(x, y, z) = \pm\psi(x, y, z) \quad \dots(5.5.6)$$

$$\psi(-x, -y, -z) = \pm\psi(x, y, z) \quad \dots(5.5.7)$$

تعرف الكمية المصورة بالمؤثر  $\hat{P}$  بالتعادلية *parity*. هكذا يمكن تصنيف دالة موجة الحالات  $\Psi(x, y, z)$  الى فئتين هما : (i) دوال  $\Psi_+$  وهي الدوال التي لا تتغير تحت عمل مؤثر العكس عليها ، (ii) دوال  $\Psi_-$  وهي الدوال التي تتغير اشارتها عند تطبيق هذا المؤثر عليها . تحقق الدوال  $\Psi_+$  و  $\Psi_-$  العلاقات التالية

$$\hat{P}\psi_+ = \psi_+, \quad \hat{P}\psi_- = -\psi_-$$

تسمى الحالات المقابلة للدوال  $\Psi_+$  بالدوال الزوجية *even* والحالات المقابلة للدوال  $\Psi_-$  بالدوال الفردية *odd*. اما تعادلية الحالات التي توصف بالدالة التالية

$$\psi = c_1\psi_+ + c_2\psi_-$$

فتكون غير معينة *indeterminate* .

لنرى نتيجة مؤثر التعادلية على الإحداثيات الكروية . يكون التحويل العكسي التالي في الإحداثيات الكارتيزية  $(x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z)$  مقابلا في الإحداثيات الكروية لما يلي:

$$r \rightarrow r, \theta \rightarrow \pi - \theta, \varphi \rightarrow \pi + \varphi.$$

حيث ان التوافقات الكروية تعطى في الإحداثيات الكروية كالتالي

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \text{const. } P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

لذلك يكون فعل مؤثر العكس على  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  مكافئا لإستبدال  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  ،  $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$  . وعليه ،

$$\begin{aligned}
 \hat{P}Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \text{const.} P_l^m(\cos(\pi - \theta)) \cdot e^{im(\pi + \varphi)} \\
 &= \text{const.} [P_l^m(-\cos\theta)] \cdot [(-1)^{|m|} e^{im\varphi}] \\
 &= \text{const.} (-1)^{l-|m|} [P_l^m(\cos\theta)] [(-1)^{|m|} e^{im\varphi}] \\
 &= \text{const.} (-1)^l [P_l^m(\cos\theta)] [e^{im\varphi}] \\
 &= \text{const.} (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)
 \end{aligned}$$

اي ان تعادلية الحالة بقيمة  $l$  تساوي  $(-1)^l$  . وملخص القول انه يكون لكل الحالات بقيمة  $l$  الزوجية تعادلية زوجية وللحالات بقيمة  $l$  الفردية تعادلية فردية .

## تمارين

(1) اثبت صحة العلاقات التبديلية التالية للمؤثرات  $L_- = L_x - iL_y$  ،  $L_+ = L_x + iL_y$

$$[L_z, L_+] = \hbar L_+, \quad [L_z, L_-] = -\hbar L_-, \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$

ثم بين ان المؤثرات  $L_+$  ،  $L_-$  هي مؤثرات الزخم الزاوي الرافعة والخافضة على الترتيب .

(2) اذا كانت  $L_+$  و  $L_-$  هي مؤثرات الزخم الزاوي الرافعة والخافضة بين ان  $\psi_{lm}$  تكون حالة ذاتية للمؤثر  $\hat{L}_z$  بقيمة ذاتية تساوي  $m \pm 2$  .

(3) عرف مؤثرات الزخم الزاوي الرافعة والخافضة . استخدم هذه المؤثرات والخاصية  $0 = [L^2, L_z]$  للحصول على القيم الذاتية للمؤثر  $L^2$  .

(4) جد القيم الذاتية للمؤثر  $L_-L_+$  في حالة التمثيل الذي تكون فيه المؤثرات  $L^2$  و  $L_z$  مصفوفة قطرية *diagonal* .

(5) (a) جد  $L \times L$  ، حيث  $L$  مؤثر الزخم الزاوي .

(b) برهن ان القيم الذاتية للمؤثر الهيرميتي تكون حقيقية.

(6) (a) جد  $[L^2, L]$  .

(b) جد القيم الذاتية للمؤثر  $L_+L_-$  .

(7) (a) برهن ان  $L^2$  و  $[L_+, L_-]$  لها دوال ذاتية أنية *simultaneous eign functions* .

(b) اذا كان مؤثرا ما يتبادل مع كل من المؤثرات  $L_x$  ،  $L_y$  ، فإنه سوف يتبادل مع  $L_{\pm}$  .

(c) اذا كانت  $b$  هي القيمة الذاتية العظمى للمؤثر  $L_{\pm}$  و ان  $a$  هي القيمة الذاتية للمؤثر  $L^2$  فإن

$$a = b(b + \hbar)$$

(8) جد القيم الذاتية للمؤثرات  $L^2$  و  $L_z$  اذا كان

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \text{ and } \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$$

(9) (a) جد ما يلي

$$[(\hat{L}_x + \hat{L}_y), \hat{L}_+]$$

(b) اثبت ان مؤثر الزخم يكون هيرميتيا .

(10) جد القيم الذاتية لمربع مؤثر الزخم الزاوي المعطى بالعلاقة التالية

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

استخدم هذه النتيجة لإيجاد طاقة جسيم كتلته  $m$  يتحرك بحرية على سطح املس على مسافة ثابتة  $r = a$  من نقطة الأصل .

---

---

## Chapter 6: Particle in a Box

يتناول هذا الفصل اشتقاق دالة الموجة وحالات الطاقة لجسيم يتحرك في منطقة جهد بئر عميق وغير محدود ، في بعد احادي ، ثنائي وثلاثي الأبعاد . كما يقدم فكرة التشعبية و كثافة الحالات باستخدام الإحداثيات الكروية لموقع الجسيم المتحرك.

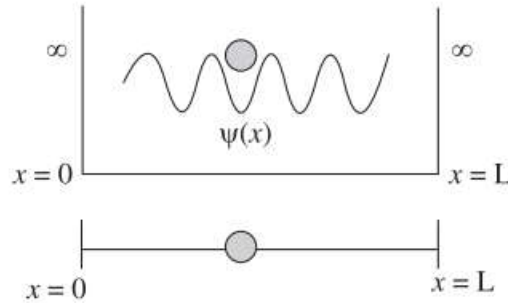
### (6.1) جسيم في بئر جهد عميق غير محدود ( صندوق )

#### *Particle in an Infinitely Deep Potential Well (Box)*

لنعتبر ان جسيما ما كتلته  $m$  ، الذي يكون مقيد الحركة في اتجاه محور  $x$  في منطقة محصورة ما بين  $x=0$  و  $x=L$  . فيزيائيا، يكون هذا الوضع مشابها لإنزلاق خرزة *bead* على سلك مستقيم املس ومشدود في اتجاه محور  $x$  بدعامتين مثبتتين عند  $x=0$  و  $x=L$  . او حركة الكترون في اتجاه محور  $x$  بحيث يكون محصورا في بئر جهد معرفا كما يلي

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{for } 0 < x < L \\ &= \infty \quad \text{for } x < 0 \text{ and } x > L \end{aligned} \quad \dots(6.1.1)$$

يبين الشكل (6.1.1) المسألة التي نحن بصدد دراستها ، حيث  $V$  تمثل طاقة جهد الإلكترون .من الواضح ، ان خارج بئر الجهد ، تكون طاقة الجسيم الحركية للجسيم سالبة لأن في هذه المنطقة تكون حركة هذا الجسيم غير مسموحة .ايضا ، عند الحدود تكون  $V$  لانهاية ، مما يضمن تلاشي دالة الموجة  $\psi(x)$  خارج البئر .



شكل (6.1.1) بئر جهد لا نهائي العمق احادي البعد .

لنفرض ان  $E$  هي طاقة الجسيم . تكون معادلة شرودنجر المستقلة زمنيا لهذا الجسيم كما يلي



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar} \psi = 0$$

أو

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad \dots(6.1.2)$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \dots(6.1.3)$$

يكون حل معادلة (6.1.2) كما يلي

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad \dots(6.1.4)$$

حيث A , B ثوابت مطلقة .

تكون الشروط الحدودية في هذه المسألة كالتالي

$$\psi(0) = 0 \text{ and } \psi(L) = 0$$

عند تعويض الشرط الحدودي الأول في معادلة (6.1.4) ، نحصل على  $B = 0$  . وعليه ، يصبح الحل (6.1.4) كما يلي

$$\psi(x) = A \sin kx \quad \dots(6.1.5)$$

بتعويض الشرط الحدودي الثاني في معادلة (6.1.5) ، نحصل على

$$A \sin kL = 0, \quad A \neq 0$$

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

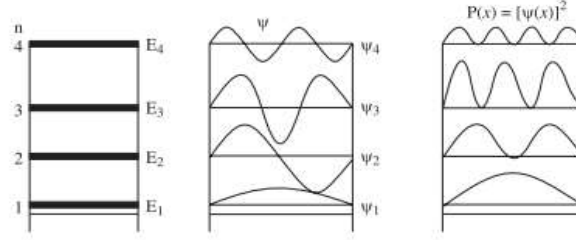
$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \dots(6.1.6)$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad \dots(6.1.7)$$

حيث تكون قيمة  $n = 0$  غير مقبولة لأنها تقابل  $\psi(x) = 0$  في كل المناطق . بما ان طاقة الجسيم تعتمد على العدد الصحيح  $n$  ، هذا يعلل استخدام الدليل  $n$  مع الطاقة  $(E_n)$  . تشير معادلة (6.1.7) الى ان الجسيم يمتلك طاقات منفصلة *discrete* ، اي ان طاقة الجسيم تمون مكتمة *quantized* . تسمى مجموعة الطاقات المنفصلة **بمستويات الطاقة** *energy levels* و يسمى العدد الصحيح  $n$  **بالعدد الكمي** . في الميكانيكا الكلاسيكية ، يسمح للجسيم ان يمتلك اي طاقة بما في ذلك الطاقة الصفرية . بينما نلاحظ ان الطاقة المكتمة هي نتيجة للميكانيكا الكمية ولا يوجد لها نظير في الفيزياء الكلاسيكية .

يوضح الشكل (6.1.2) مستويات الطاقة للجسيم ، ويلاحظ ان المسافات بين هذه المستويات تكون غير متساوية.



شكل (6.1.2) مستويات الطاقة ، دوال الموجة ، وكثافة الإحتمال .

تكون دالة الموجة للجسيم كالتالي

$$\psi(x) = A \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \dots(6.1.8)$$

بتطبيق شرط المعايرة على دالة الموجة هذه ، نحصل على التالي

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_0^L A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1$$

بالتكامل نجد ان

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

وعليه ، تصبح دالة الموجة المعيرة على النحو التالي

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \dots(6.1.9)$$

لبرهان ان دوال موجة الجسيم في بئر الجهد اللانهائي العمق تكون لها الخاصية التعامدية ، نعتبر دالتين موجيتين هما

$\psi_m(x), \psi_n(x)$  والمقابلتين لطاقتين هما  $E_m, E_n$  على الترتيب . عندئذ ، يكون

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi_m(x)\psi_n(x)dx &= \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L \left[ \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \delta_{mm}, \quad \{ \delta_{mm} = 0, \text{ for } m \neq n \text{ and } \delta_{mm} = 1 \text{ for } m = n \} \end{aligned}$$

كما تعطى كثافة الإحتمال لإيجاد الجسيم عند اي موقع على محور  $x$  بالعلاقة التالية

$$P_n(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} \quad \dots(6.1.10)$$

بالرغم من استخدام دالة الموجة الزمنية لحساب دالة الإحتمال ، نجد ان هذه الدالة لا تعتمد على الزمن . يظهر الشكل (6.1.2) مستويات الطاقة و دوال الموجة القابلة لهذه المستويات و كثافة الإحتمال . نلاحظ ان دوال موجة الجسيم المحصور في الصندوق تكون مماثلة لدوال اراحة الوتر المشدود . وهذا يكون متوقعا لأن الشروط الحدودية تكون متشابهة في كلا الحالتين . كما تكون كثافة الإحتمال المقابلة للعدد الكمي  $n=1$  عظمى عند منتصف بئر الجهد ( $x = L/2$ ) في حين تكون هذه الكثافة المقابلة للعدد الكمي  $n=2$  تساوي الصفر عند منتصف البئر . وهذه الحقيقة تتناقض مع توقعات الفيزياء الكلاسيكية بتساوي احتمالية تواجد الجسيم عند اي مكان في البئر . وكلما ارتفعت مستويات الطاقة بعقد *nodes* اكثر (النقط التي تتلاشى عندها دالة الموجة) تصبح الإحتمالية العظمى والصغرى اكثر تقاربا ويصبح التغير في الإحتمالية عبر الصندوق غير قابلة للتحري *undetectable* . في مشاهداتنا اليومية نهتم بالأجسام العيانية *macroscopic objects* . يكون تباعد مستويات الطاقة صغيرا جدا الى درجة عدم ملاحظته ولذلك تظهر مستويات الطاقة وكأنها متصلة . ولكن في حالة الأجسام المجهرية *microscopic objects* يكون تباعد مستويات الطاقة بحيث يمكن ملاحظته ويمكن اعتبار طبيعة طاقة هذه المستويات **كطيف منفصل** . ولتوضيح ذلك نتناول الأمثلة التالية .

لنعتبر نظام عياني ، مثل حركة خرزة ذات كتلة  $m=10\text{gm}$  محصورة بحيث تتحرك في اتجاه محور  $x$  في منطقة بعدها  $L=1.0 \text{ m}$  . تكون طاقة الخرزة كما يلي

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 5.5 \times 10^{-66} n^2 \text{ J}$$

وعليه ، تكون مستويات الطاقة الثلاثة الأولى كما يلي

$$E_1 = 5.5 \times 10^{-66} \text{ J}, E_2 = 22.0 \times 10^{-66} \text{ J}, E_3 = 50.5 \times 10^{-66} \text{ J}$$

من هنا نجد ان تباعد هذه المستويات يكون صغير جدا ليلاحظ . كما تكون سرعة الخريزة المقابلة للطاقة  $E_1$  تساوي  $3.3 \times 10^{-32} \frac{m}{s}$  ، وعليه يكون من الصعب ان نميز ان كانت هذه الخريزة متحركة ام ساكنة . هكذا ، بسبب صغر الكمية  $\hbar$  ، يكون تكميم الطاقة غير مشاهد للأجسام العيانية .

لنعتبر الآن نظاما مجهريا ، مثل حركة الإلكترون المحصور في صندوق بعدة  $L=1.0 \text{ \AA}$  . تكون طاقة هذا الإلكترون كالتالي

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 6 \times 10^{-18} n^2 \text{ J} = 38 n^2 \text{ eV}$$

وتكون مستويات الطاقة الثلاثة الأولى كما يلي

$$E_1 = 38 \text{ eV}, E_2 = 152 \text{ eV}, E_3 = 342 \text{ eV}.$$

نلاحظ ان مستويات الطاقة هذه تكون متباعدة بدرجة كافية ولذلك يكون مبدأ تكميم الطاقة امرا معقولا .

#### • مبدأ التقابلية *correspondence principle*

يعطى التباعد بين مستويات الطاقة المتتالية بالعلاقة التالية

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} [(n+1)^2 - n^2]$$

للأجسام العيانية التي تحقق الشروط التالية  $m \rightarrow \infty$ , and  $L \rightarrow \infty$  ، تصبح  $\Delta E \rightarrow 0$  . وعليه يصبح طيف الطاقة المنفصل *discrete* طيفا متصلا *continuous* . وتسمى هذه بقاعدة ( مبدأ ) التقابلية .

### (6.2) جسيم في بئر جهد ثنائي الأبعاد *Particle in a Two Dimensional Potential Well*

لنعتبر بئر جهد ثنائي الأبعاد و المعروف كما يلي

$$\begin{aligned} V &= 0 \text{ for } 0 < x < L_1, 0 < y < L_2 \\ &= \infty \text{ for } x > L_1, y > L_2 \end{aligned} \quad \dots(6.2.1)$$

تكون معادلة شرودنجر لجسيم محصور الحركة ضمن هذا البئر كما يلي

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad \dots(6.2.2)$$

تكون صيغة هذه المعادلة في حالة البئر ثنائي الأبعاد كما يلي

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} + k^2 \psi(x, y) = 0$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \dots(6.2.3)$$

لحل معادلة (6.2.2) نفرض ان

$$\psi(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \dots(6.2.4)$$

بتعويض معادلة (6.2.4) في معادلة (6.2.2) نحصل على

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = -\frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} - k^2 \quad \dots(6.2.5)$$

نلاحظ ان الطرف الأيسر في هذه المعادلة هو دالة للمتغير  $x$  بينما يكون الطرف الأيمن دالة للمتغير  $y$  ، وهما متغيران مستقلان . وتكون هذه المعادلة متوافقة فقط اذا كان كل طرف فيها يساوي نفس الثابت ، لنفرض ان هذا الثابت يساوي  $-k_1^2$  . ( مع ملاحظة ان اختيار الإشارة الموجبة لهذا الثابت، يجعل حل المعادلات المفروزة على الصورة الأسية ، وهذا الحل ينعدم عند الحدود ) . وعليه ،

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = -\frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} - k^2 = -k_1^2 \quad \dots(6.2.6)$$

يمكن تفريق معادلة (6.2.6) الى معادلتين هما

$$\frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} + k_1^2 f_1(x) = 0 \quad \dots(6.2.7)$$

$$\frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} + k_2^2 f_2(y) = 0 \quad \dots(6.2.8)$$

حيث

$$k_2^2 = k^2 - k_1^2 \quad \text{or} \quad k_1^2 + k_2^2 = k^2 \quad \dots(6.2.9)$$

يكون حل معادلتني (6.2.7) و (6.2.8) على النحو التالي

$$f_1(x) = A \sin k_1 x + B \cos k_1 x \quad \dots(6.2.10)$$

$$f_2(y) = C \sin k_2 y + D \cos k_2 y \quad \dots(6.2.11)$$

باستخدام الشروط الحدودية التالية :  $f_1(0) = 0, f_2(0) = 0$  ، نجد ان  $B = 0, D = 0$  . وعليه ، تكون حلول معادلتني (6.2.10 - 6.2.11) كما يلي

$$f_1(x) = A \sin k_1 x \quad \dots(6.2.12)$$

$$f_2(y) = C \sin k_2 y \quad \dots(6.2.13)$$

بتطبيق الشرط الحدودي  $f_1(L_1) = 0$  نجد ان

$$\sin k_1 L_1 = 0 \Rightarrow k_1 L_1 = n_1 \pi \quad n_1 = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{L_1} \quad \dots(6.2.14)$$

بالمثل ، تطبيق الشرط الحدودي التالي :  $f_2(L_2) = 0$  ، نحصل على التالي

$$\sin k_2 L_2 = 0 \Rightarrow k_2 L_2 = n_2 \pi, \quad n_2 = 1, 2, 3, \dots$$

$$\therefore k_2 = \frac{n_2 \pi}{L_2} \quad \dots(6.2.15)$$

من معادلة (6.2.9) ، نحصل على

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 = \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} \right) \pi^2$$

$$\text{or} \quad \frac{2mE}{\hbar^2} = \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} \right) \pi^2$$

$$E_{n_1, n_2} = \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} \right) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \quad \dots(6.2.16)$$

تعطي هذه المعادلات قيم طاقة الجسيم المسموح بها عندما يكون هذا الجسيم محصورا في بئر جهد لانهاائي العمق وثنائي الأبعاد .

من معادلة (6.2.16) نجد ان مستويات الطاقة لبئر جهد مربع الشكل وبعرض  $L$  تكون كالتالي

$$E_{n_1, n_2} = (n_1^2 + n_2^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \dots(6.2.17)$$

تحديدا ،

$$E_{1,1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, E_{1,2} = E_{2,1} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, E_{2,2} = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

$$E_{1,3} = E_{3,1} = \frac{10\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \text{etc.}$$

وعليه ، يكون حل معادلة شرودنجر كما يلي

$$\psi(x, y) = A \sin \frac{n_1 \pi x}{L_1} \sin \frac{n_2 \pi y}{L_2} \quad \dots(6.2.18)$$

### (6.3) جسيم في بئر جهد ثلاثي الأبعاد Particle in a Three Dimensional Potential Well

في هذا البند ، نتناول حركة جسيم كتلته  $m$  وطاقته  $E$  عندما يكون محصورا في بئر جهد ثلاثي الأبعاد ، ويكون الجهد معرّفا على النحو التالي

$$V(x, y, z) = 0 \text{ for } 0 < x < L_1, 0 < y < L_2, 0 < z < L_3$$

$$= \infty \text{ outside the well} \quad \dots(6.3.1)$$

تكون معادلة شرودنجر الموجية لهذا الجسيم على الصورة التالي

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(6.3.2)$$

حيث

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \dots(6.3.3)$$

نفترض ان حل معادلة (6.3.2) على الصورة التالية

$$\psi(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) \quad \dots(6.3.4)$$

يعطي تعويض معادلة (6.3.4) في معادلة (6.3.2) ما يلي

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} + \frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3(z)}{dz^2} = -k^2 \quad \dots(6.3.5)$$

نستخدم طريقة فرز المتغيرات التي سبق شرحها في البند (6.2) لنحصل على ما يلي

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} = -k_1^2 \quad \dots(6.3.6)$$

$$\frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2(y)}{dy^2} = -k_2^2 \quad \dots(6.3.7)$$

$$\frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3(z)}{dz^2} = -k_3^2 \quad \dots(6.3.8)$$

حيث

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \dots(6.3.9)$$

هنا ، افترضنا ان ثوابث الفرز سالبة ، وعكس ذلك لا تتحقق الشروط الحدودية .

تكون حلول المعادلات (6.3.6-6.3.9) على الشكل التالي

$$f_1(x) = A_1 \sin k_1 x + B_1 \cos k_1 x \quad \dots(6.3.10)$$

$$f_2(y) = A_2 \sin k_2 y + B_2 \cos k_2 y \quad \dots(6.3.11)$$

$$f_3(z) = A_3 \sin k_3 z + B_3 \cos k_3 z \quad \dots(6.3.12)$$

يعطي تطبيق الشروط الحدودية ما يلي

$$f_1(x) = f_2(y) = f_3(z) = 0 \text{ at } x = y = z = 0 \text{ give } B_1 = B_2 = B_3 = 0$$

$$f_1(x) = 0 \text{ at } x = L_1, f_2(y) = 0 \text{ at } y = L_2, f_3(z) = 0 \text{ at } z = L_3 \text{ give}$$

$$k_1 = \frac{n_1 \pi}{L_1}, k_2 = \frac{n_2 \pi}{L_2}, k_3 = \frac{n_3 \pi}{L_3}, \text{ where } n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots$$

من معادلة (6.3.9) ، نجد ان



$$E_{n_1, n_2, n_3} = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$= \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2} \right) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \quad \dots(6.3.13)$$

كما يكون حل معادلة شرودنجر كالتالي

$$\psi(x, y, z) = A \sin \frac{n_1 \pi x}{L_1} \sin \frac{n_2 \pi y}{L_2} \sin \frac{n_3 \pi z}{L_3} \quad \dots(6.3.14)$$

إذا كانت  $L_1 = L_2 = L_3 = L$  (أي عندما يكون البئر مكعب الشكل) فإن مستويات الطاقة تكون كما يلي

$$E_{n_1, n_2, n_3} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \dots(6.3.15)$$

وتكون دوال الموجة المعيارية والمقابلة لهذه المستويات كما يلي

$$\psi(x, y, z) = \left( \frac{8}{L^3} \right)^{1/2} \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L} \quad (6.3.16)$$

كما يكون طاقة المستوى الأرضي *ground energy level* كالتالي

$$E_{1, 1, 1} = 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \dots(6.3.17)$$

وتكون طاقة المستويات التالية لهذا المستوى كما يلي

$$E_{1, 1, 2} = E_{1, 2, 1} = E_{2, 1, 1} = 6 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \dots(6.3.18)$$

نلاحظ ان هناك ثلاث مجموعات من الأعداد الكمية وهي  $(1, 1, 2)$  ,  $(1, 2, 1)$  و  $(2, 1, 1)$  ، اي هناك ثلاث حالات كمية لها نفس حالة الطاقة . لذلك ، يقال ان مسنوى الطاقة هذا له ثلاث طويات (ثنيات) منحلة *3-fold degeneracy* . يوضح الشكل (6.3.1) *انحلالية (تشعبية) degeneracy* مستويات الطاقة .

	Degeneracy
$E = 17 \varepsilon_1$	223, 132, 322 3
$E = 14 \varepsilon_1$	123, 132, 213, 231, 321, 312 6
$E = 12 \varepsilon_1$	222 1
$E = 11 \varepsilon_1$	113, 131, 311 3
$E_3 = 9 \varepsilon_1$	122, 212, 221 3
$E_2 = 6 \varepsilon_1$	112, 121, 211 3
	1, 1, 1
$E_1 = E_{111} = 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = 3 \varepsilon_1$	1

شكل (6.3.1) حالات الطاقة المسموح بها لجسيم في صندوق مكعب .

#### (6.4) الإنحلالية (التشعبية) Degeneracy

لنعتبر معادلة القيمة الذاتية التالية

$$\hat{Q}u = qu \quad \dots(6.4.1)$$

إذا كان هناك  $n$  من الدوال الذاتية المستقلة  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  والتابعة لنفس القيمة الذاتية  $q$ ، فإنه يقال ان لهذه القيمة الذاتية  $n$  - **طوية تحليلية** *fold degenerate* . كما يكون الترابط الخطي المكون من هذه

$$\psi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

هو دالة ذاتية للمؤثر  $\hat{Q}$  بنفس القيمة الذاتية  $q$  .

يقال ان الدوال الذاتية  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  مستقلة خطيا اذا تحققت المعادلة التالية

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$$

بحيث تكون كل الثوابت فيها تساوي الصفر. وهذا يعني لا يمكن التعبير عن اي عضو في مجموعة الدوال الذاتية كتركيب خطي للأعضاء الأخرى في تلك المجموعة . فمثلا ، الدوال  $u_1 = 3x, u_2 = 5x^2$  -

الدوال الذاتية المستقلة خطيا لأن  $u_2 = 5u_3 - \left(\frac{1}{3}\right)u_1$  تساوي درجة انحلالية القيمة الذاتية عدد  $x, u_3 = x^2$  الدوال الذاتية المستقلة خطيا التي تقابل القيمة الذاتية . كما ان دوال الموجة للحالة المستقرة *stationary state*  $\psi_{112}, \psi_{121}, \psi_{211}$  لجسيم في صندوق مكعب هي دوال **منحلة** وتراكبها الخطي هو دالة ذاتية لهذا الجسيم بنفس القيمة الذاتية .

### (6.5) كثافة الحالات *Density of States*

في حالة الجسيم المحصور في مكعب طول ضلعه  $L$  ، تعطى مستويات الطاقة المسموحة والحالات الكمية المرافقة بالعلاقة التالية

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{n_1 \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n_2 \pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n_3 \pi}{L} \right)^2 \right] \quad \dots(6.5.1)$$

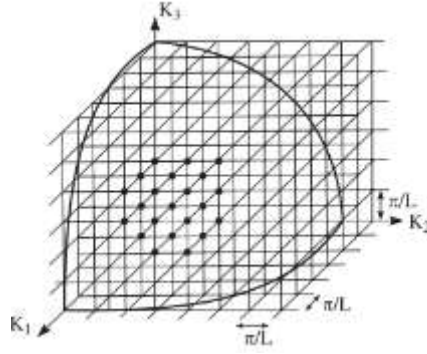
$$\psi(x, y, z)_{n_1 n_2 n_3} = \text{const.} \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L} \quad \dots(6.5.2)$$

حيث  $n_1, n_2, n_3$  هي اعداد صحيحة غير صفرية .

كما يكون للجسيم الموصوف بدالة الموجة  $\psi$  **متجه موجي** *wave vector* الذي يعبر عنه بالرمز  $k$  وتعطى مكونات هذا المتجه كما يلي

$$k = \left\{ \frac{n_1 \pi}{L}, \frac{n_2 \pi}{L}, \frac{n_3 \pi}{L} \right\}. \quad \dots(6.5.3)$$

يمكننا رسم مكونات متجه الموجة  $k$  في فضاء ثلاثي الأبعاد بحيث تكون  $k_1, k_2, k_3$  محاور كارتيزية . يسمى هذا **بفضاء  $k$**  ، وفي هذا الفضاء تشكل قيم  $k$  شبكة نقاط تكعيبية *cubical point lattice* بتباعد بينها يساوي  $\pi/L$  . وتمثل كل نقطة شبكية في هذا الفضاء حالة الجسيم المسموحة . كما تقسم هذه النقاط الفضاء الى خلايا *cells* بحجم يساوي  $(\pi/L)^3$  . ( الشكل 6.5.1 )



شكل (6.5.1) فضاء  $k$ - ثلاثي الأبعاد وكل نقطة شبكية هي حالة .

نريد ايجاد عدد الحالات الكمية ذات متجة موجي قيمته تقع ضمن الفترة  $k$  و  $k+dk$  . يكون هذا العدد مساويا لعدد نقاط الشبكة في فضاء  $k$ - التي تقع بين قشرتين كروييتين ، متمركزة عند نقطة الأصل ، ونصفا قطريهما هما  $k$  و  $k+dk$  في المثلث *octant* الموجب .

يكون حجم المنطقة الواقعة بين هاتين القشرتين يساوي  $\frac{1}{8} (4\pi k^2 dk)$  . وعليه ، يكون عدد الحالات الكمية ذات متجهات موجية واقعة ضمن المدى  $k, k+dk$  كما يلي

$$\left( g(k)dk = \frac{\frac{1}{8}(4\pi k^2 dk)}{(\pi/L)^3} = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \right) \quad \dots(6.5.4)$$

حيث  $V = L^3$  هو حجم الحيز المغلق ( المكعب). تمثل الدالة  $g(k)$  عدد الحالات الكمية لكل وحدة مدى طاقة عند الطاقة  $E$  . تسمى هذه الدالة **بكثافة الحالات** *density of states* .

باستعمال العلاقة  $p = \hbar k = \sqrt{2mE}$  ، يمكن التعبير عن كثافة الحالات كما يلي

$$g(p)dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad \dots(6.5.5)$$

أو

$$g(E)dE = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{E} dE \quad \dots(6.5.6)$$

• الشروط الحدودية الدورية *Periodic Boundary Condition*

يكون قانون كثافة الحالات السابق غير معتمدا على شكل الشروط الحدودية المطبقة على سطح المغلف . سنبرهن هذا باستخدام شرط حدودي بديل ، يعرف بشرط الحدود الدوري . في حالة المغلف التكعيبي بضلع  $L$  ، يعبر عن هذا الشرط كالتالي

$$\begin{aligned}\psi(0, y, z) &= \psi(L, y, z) \\ \psi(x, 0, z) &= \psi(x, L, z) \\ \psi(x, y, 0) &= \psi(x, y, L)\end{aligned}$$

يكون حل معادلة شرودنجر للجسيم في الصندوق كما يلي

$$\psi(x, y, z) = \text{const. exp } i\{k_1 x + k_2 y + k_3 z\}$$

كما يكون متجه الموجة  $k$  قيذا بالقيم التالية

$$k = \left\{ \frac{2\pi}{L} n_1, \frac{2\pi}{L} n_2, \frac{2\pi}{L} n_3 \right\}$$

نلاحظ ان  $n_i$  تتخذ القيم الصحيحة الموجبة والسالبة . لحساب كثافة الحالات ، عوضا عن اعتبار المثلث الموجب من الكرة في فضاء  $k$  ، نعتبر الكرة بأكملها ، ويكون التباعد بين نقاط الشبكة في هذا الفضاء مساويا للمقدار  $2\pi/L$  . كما يعطى عدد الحالات ذات المتجه الموجي  $k$  الذي تقع قيمته في المدى  $k, k + dk$  بالعلاقة التالية

$$g(k)dk = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = \frac{V}{2\pi} k^2 dk \quad \dots(6.5.7)$$

(6.6) بئر الجهد المتماثل كرويا *spherically symmetric potential well*

يعرف بئر الجهد المتماثل كرويا كما يلي

$$\begin{aligned}V(r) &= 0 \text{ for } r < r_0 \\ &= \infty \text{ for } r = r_0\end{aligned} \quad \dots(6.6.1)$$

تكون معادلة شرودنجر لجسيم ما داخل هذا البئر كالتالي

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

على فرض ان دالة الموجة تعتمد على المسافة الشعاعية  $r$  ، تصبح معادلة شرودنجر السابقة على الصورة التالية

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0 \quad \dots(6.6.2)$$

أو

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + k^2 \psi = 0 \quad \dots(6.6.3)$$

حيث

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \dots(6.6.4)$$

لحل معادلة شرودنجر السالفة الذكر ، نستخدم التحويل التالي

$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r} \quad \dots(6.6.5)$$

باستخدام هذا المتغير الجديد تتحول معادلة (6.6.3) الى الصيغة التالية

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0 \quad \dots(6.6.6)$$

يكون حل معادلة (6.6.6) كما يلي

$$u = A \sin(kr + \alpha)$$

أو

$$\psi = \frac{A}{r} \sin kr \quad \dots(6.6.8)$$

حيث  $A$  و  $\alpha$  هي ثوابت .

عند  $r=0$  ، تكون  $\psi$  محدودة . هذا يعطى  $\alpha = 0$  . وعليه ،

$$\psi = \frac{A}{r} \sin kr \quad \dots(6.6.8)$$

عند  $r=r_0$  ، تكون  $\psi = 0$  . وعليه

$$\sin kr_0 = 0$$

$$k = \frac{n\pi}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{n\pi}{r_0} \quad \dots(6.6.9)$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mr_0^2}$$

تصبح دالة الموجة للجسيم كما يلي

$$\psi(r) = \frac{A}{r} \sin \frac{n\pi r}{r_0} \quad \dots(6.6.10)$$

باستخدام شرط معايرة دالة الموجة المعطاة في معادلة (6.6.10) ، نحصل على التالي

$$\int_0^{r_0} |\psi(r)|^2 dr = 1$$

$$\int_0^{r_0} \left( \frac{A^2}{r^2} \sin^2 \frac{n\pi r}{r_0} \right) 4\pi r^2 dr = 1$$

$$2\pi A^2 \int_0^{r_0} \left( 1 - \cos \frac{2\pi r}{r_0} \right) dr = 1$$

$$\therefore A = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \quad \dots(6.6.11)$$

وعليه ، تكون الصورة النهائية لدالة الموجة كما يلي

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{r_0} \quad \dots(6.6.12)$$

• المسافة الأغلب احتمالا *most probable distance*

تكون احتمالية ايجاد الجسيم عند المسافة  $r$  كما يلي

$$P(r)dr = |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = \left[ \frac{1}{2\pi r_0} \frac{1}{r^2} \sin^2 \frac{n\pi r}{r_0} \right] 4\pi r^2 dr$$

نحصل على المسافة الأغلب احتمالا بإستخدام الشرط التالي

$$\frac{dP(r)}{dr} = 0, \text{ and } \frac{d^2P(r)}{dr^2} = -ive$$

$$\frac{2}{r_0} \left[ \left( 2 \sin \frac{n\pi r}{r_0} \right) \left( \cos \frac{n\pi r}{r_0} \right) \right] \left( \frac{n\pi}{r_0} \right) = 0$$

$$r_{mp} = \frac{r_0}{2} \quad \dots(6.6.13)$$

تعطى احتمالية ايجاد الجسيم في المنطقة  $r < r_{mp}$  كما يلي

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{r_0/2} P(r)dr \\ &= \int_0^{r_0/2} \left[ \left( \frac{1}{2\pi r_0} \right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \left( \frac{n\pi r}{r_0} \right) \right] 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



## تمارين محلولة

(1) جسيم في الحالة الأرضية موضوعا في بئر جهد احادي الأبعاد ، عرضه  $L$  وجدرانه غير منفذة تقع عند  $0 < x < L$  . حد احتمالية تواجد هذا الجسيم في المنطقة  $L/3 < x < 2L/3$  في الحالة الأرضية؟

### الحل

دالة موجة الجسيم المعاييرة للحالة الأرضية هي

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}$$

تعطى الاحتمالية كما يلي

$$\begin{aligned} P &= \int_{L/3}^{2L/3} |\psi(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.61. \end{aligned}$$

(2) وضع جسيم في بئر جهد مربع وثنائي الأبعاد وبجدران غير منفذة موقعها عند  $0 < x < L, 0 < y < L$  . جد احتمالية تواجد الجسيم في المنطقة  $0 < x < L/3, 0 < y < L/3$  .؟

### الحل

دالة الموجة في الحالة الأرضية هي

$$\psi = \frac{2}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$$

الاحتمالية هي

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{L/3} \int_0^{L/3} |\psi|^2 dx dy = \frac{4}{L^2} \int_0^{L/3} \int_0^{L/3} \left( \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{\pi y}{L} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{L^2} \int_0^{L/3} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L}\right) dx \int_0^{L/3} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{L}\right) dy \\ &= 0.32. \end{aligned}$$

(3) اذا كانت دالة موجة جسيم في صندوق احادي البعد طول ضلعه  $L$  هي  $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$  . جد القيمة المتوقعة للمقادير  $x$  ،  $x^2$  .

الحل

$$\langle x \rangle = \int_0^L \psi^* \hat{x} \psi dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{L}{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$

(4) اثبت ان دالة الموجة  $\psi_n = A \sin \frac{n\pi x}{L}$  لجسيم يتحرك في بئر جهد عرضه  $L$  لا تكون دالة ذاتية للمؤثر  $\hat{p}_x$ . ماذا يقال بالنسبة للدالة  $\psi = A \exp(\pm ikx)$  .

الحل

$$\hat{p}_x \psi_n = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$= -\frac{i\hbar n\pi}{L} A \cos \frac{n\pi x}{L}$$

هكذا لا تكون الدالة  $A \sin \frac{n\pi x}{L}$  دالة ذاتية للمؤثر  $\hat{p}_x$  .

بينما في حالة الدالة الثانية ، نجد ان

$$\hat{p}_x \psi_n = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} A \exp(\pm ikx) = \pm \hbar k [A \exp(\pm ikx)]$$

وعليه ، تكون هذه الدالة دالة ذاتية لنفس المؤثر بقيمة ذاتية هي  $\hbar k$  .

(5) برهن ان دوال الموجة  $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$  تكون متعامدة؟

$$\begin{aligned}
\int_0^L \Psi_m \Psi_n dx &= \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
&= \frac{1}{L} \int_0^L \left[ \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} \right] dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

## تمارين

(1) يمتد حاجز جهد احادي البعد ارتفاعه  $V$  من  $x = 0 \rightarrow \infty$ . اذا سقط جسيم بطاقة حركية  $E$  من جهة اليسار على هذا الحاجز ( عتبة الجهد). حل هذه المسألة من وجهة نظر الميكانيكا الكمية للحالات التالية :

$$(i) E < V , (ii) E > V$$

(2) ماذا تعني ظاهرة النفق ؟ احسب احتمالية النفاذ لجسيم يسقط على حاجز جهد في حالة كون الطاقة الحركية للجسيم اقل من ارتفاع الحاجز . ناقش تأثير ارتفاع وعرض الحاجز على احتمالية النفاذ ؟.

(3) اكتب معادلة شرودنجر لجسيم محصور في بئر جهد لانهاائي العمق وعرضه  $L$  ، جد دوال الموجة ومستويات الطاقة للجسيم .

(4) اذا كانت حركة جسيم محصورة في صندوق احادي البعد بجدران تامة الصلابة عند  $x=0$  ،  $x=L$  . حل هذه المسألة من وجهة نظر الميكانيكا الكمية ، جد احتمالية تواجد الجسيم عند المواقع  $x = \frac{L}{4}, \frac{L}{3}, \frac{L}{2}, \frac{2L}{3}$  .

(5) اعط معالجة ميكانيكية كمية لجسيم محصور في بئر جهد ثنائي الأبعاد . وضح مفهوم الإنحلالية في هذا المضمار .

(6) اذا كان حركة جسيم مقيدة في صندوق ابعاده :  $L_1, L_2, L_3$  . جد معادلة شرودنجر للجسيم وحل هذه المعادلة لإيجاد القيم الذاتية والدوال الذاتية . اذا كان الصندوق مكعب الشكل ، جد درجة الإنحلالية لمستويات الطاقة التي ترتيبها : الثاني ، الثالث ، الرابع و السادس .

(7) اذا كانت حركة جسيم محصورة في مكعب طول ضلعه  $L$  ، جد الدوال الذاتية والقيم الذاتية .

(8) جد الدوال الذاتية والقيم الذاتية لجسيم متحركا في بئر جهد مربع واحادي البعد بجدران لانتهائية الإرتفاع .

(9) ماذا يعنى بحالات حرة ومقيدة لنظام ميكانيكي كمي .

(10) قيدت حركة جسيم كتلته  $m$  في صندوق جهد مستطيل معرفا كما يلي

$$V = 0 \text{ if } 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c \\ = \infty \text{ elsewhere.}$$

حيث  $a, b, c$  ثوابت . حل معادلة شرودنجر ثم جد تعبيراً لدوال الموجة والطاقات .

(11) برهن ان الصورة الرياضية لكثافة حالات جسيم كتلته  $m$  اذا كان محصور الحركة في حجم  $V$  تكون كما يلي

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

## الفصل السابع : المتذبذب التوافقي

### Harmonic Oscillator

يتناول هذا الفصل معالجة كلاسيكية وأخرى كمية لحركة المتذبذب التوافقي، كما يقدم طريقة لحل معادلة شرودنجر لهذا المتذبذب بدلالة كثيرة الحدود الهيرميتية وحالات الطاقة لكل مستوى يحتمل ان يتواجد فيه هذا المتذبذب. ويعرض احتمالية تواجده في الحدود الكلاسيكية .

#### (7.1) معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي

ندرس في هذا الفصل معالجتين : احدهما كلاسيكية وأخرى كمية لحركة المتذبذب التوافقي

##### (7.1.1) معالجة كلاسيكية

يتكون المتذبذب التوافقي البسيط من كتلة مربوطة بزنبك مرن ويثبت الطرف الآخر للزنبك في نقطة ثابتة. عند ازاحة هذه الكتلة عن موضع استقرارها ، تؤثر عليها قوة معاكسة لإتجاه ازاحتها وتتناسب طرديا مع مقدار هذه الإزاحة . تسمى هذه القوة **بالقوة الإسترجاعية** ( المستعيدة ) *restoring force* . تكون معادلة حركة الكتلة ( قانون نيوتن الثاني ) بالصورة التالية

$$m\ddot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \dots(7.1.1)$$

حيث  $m$  كتلة الجسم المعلق بالزنبك ،  $k$  ثابت القوة ( ثابت الزنبك ) ، تمثل  $x$  ازاحة الجسم عن موضع الإستقرار (الإتزان) . تسمى  $\omega$  التردد الزاوي الكلاسيكي للمتذبذب التوافقي . يكون حل معادلة (7.1.1) كما يلي

$$x = A \cos (\omega t + \delta) \quad \dots(7.1.2)$$

حيث  $A$  هي سعة الذبذبة وتساوي اقصى ازاحة للجسيم عن موضع الإتزان ،  $\delta$  طور الجسيم عند اللحظة الإبتدائية.

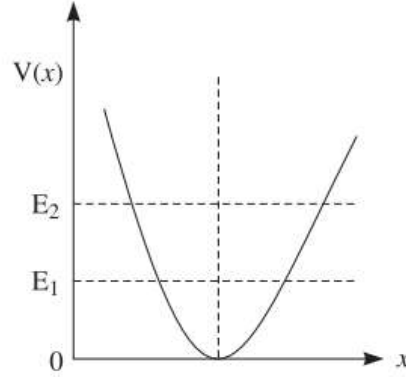
تكون طاقة الجهد للمتذبذب كما يلي

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \dots(7.1.3)$$

كما تعطى الطاقة الكلية لهذا المتذبذب كالتالي

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \quad \dots(7.1.4)$$

بما انه من الممكن جعل المتذبذب يهتز بأي سعة  $A$  ، لذلك يفترض ان تتخذ  $E$  اي قيمة اعتمادا على هذه السعة . وبعبارة اخرى ، تكون الطاقة متغير متصل ( الشكل 7.1.1 ) .

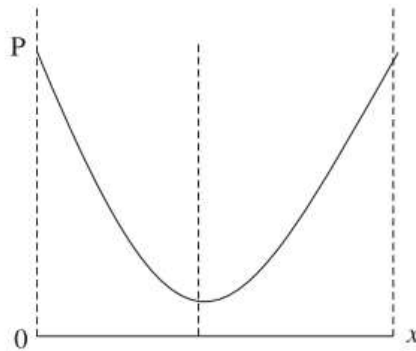


شكل (7.1.1) دالة جهد المتذبذب التوافقي .

عند السعات  $A_1$  ،  $A_2$  تكون طاقة المتذبذب المقابلة لهذه السعات كما يلي :  $\frac{1}{2}kA_1^2$  ،  $\frac{1}{2}kA_2^2$  على الترتيب .

بضبط سعة المتذبذب ما بين السعات  $A_1$  ،  $A_2$  ، يمكن جعل المتذبذب يهتز بأي طاقة بين  $E_1 = (1/2)m\omega^2 A_1^2$  و  $E_2 = (1/2)m\omega^2 A_2^2$  . هكذا يوجد عدد لانهائي من مستويات الطاقة ما بين  $E_1$  ،  $E_2$  . وهذا ما نعنيه بعبارة ان الطاقة تكون متغير متصل .

كما تكون سرعة الجسيم في حالة الإهتزاز صفرا عند نقاط التحول  $x = A, -A$  : *turning points* وتكون هذه السرعة عظمى عند موقع الإتران ،  $x=0$  . هذا يعنى ان المتذبذب يقضي زمن اعظمى عند نقاط التحول وزمن اصغرى عند نقطة الإتران . وعليه ، تكون احتمالية تواجد هذا المتذبذب عظمى عند نقاط التحول وصغرى عند نقطة الإتران ( الشكل 7.1.2 ) . وفقا للفيزياء الكلاسيكية ، لا يكون هناك تواجد للمتذبذب خلف نقاط التحول .



شكل (7.1.2) دالة احتمال المتذبذب التوافقي البسيط .

## (7.1.2) معالجة كمية *Quantum Mechanical Treatment*

تكون معادلة شرودنجر للمتذبذب التوافقي عبارة عن معادلة القيم الذاتية التالية

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad \text{where, } V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi = 0 \quad \dots(7.1.5)$$

سنقوم بتحويل هذه المعادلة (7.1.5) الى شكل سهل بإدخال متغير مستقل جديد  $\xi$  والمعرف كالتالي

$$\xi = \alpha x \quad \dots(7.1.6)$$

حيث يتم اختيار المعامل  $\alpha$  بطريقة تجعل المعادلة الجديدة بسيطة ، ويكون كالتالي

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \alpha \frac{d\psi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right) = \alpha \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \alpha^2 \frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$

وعليه ، تؤول معادلة (7.5.1) بدلالة هذا المتغير الى الصورة التالية

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left( \frac{2mE}{\hbar^2 \alpha^2} - \frac{m^2 \omega^2 \xi^2}{\hbar^2 \alpha^4} \right) \psi = 0 \quad \dots(7.1.7)$$

لنعتبر ان

$$\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar} . \quad \dots(7.1.8)$$

تصبح معادلة (7.1.7) كالتالي

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left( \frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2 \right) \psi = 0 \quad \dots(7.1.9)$$

بإدخال المعامل  $\beta$  والمعرف بالتالي

$$\beta = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad \dots(7.1.10)$$

، تصبح معادلة (7.1.9) كما يلي

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\beta - \xi^2)\psi = 0 \quad \dots(7.1.11)$$

• **الحل التقاربي Asymptotic solution** ( $\xi \rightarrow \pm\infty$ ) :

يجب ان تحقق دالة الموجة  $\psi(\xi)$  الشرط التالي

$$\psi(\pm\infty) = 0$$

عندما  $\xi \rightarrow \infty$  ، يمكن اهمال  $\beta$  . وعليه ، تصبح معادلة (7.1.11) على الشكل التالي

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi = 0 \quad \dots(7.1.12)$$

يكون حل هذه المعادلة كما يلي

$$\psi = \exp\left(\pm \frac{1}{2}\xi^2\right)$$

نحذف الإشارة الموجبة للحل السابق لأنها لا تحقق الشرط  $\psi(\pm\infty) \rightarrow 0$  . هكذا يكون الحل التقاربي للمعادلة (7.1.11) على الشكل التالي

$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \quad \dots(7.1.13)$$

دعنا نبرهن ان معادلة (7.1.13) تحقق معادلة (7.1.12) . من معادلة (7.1.13) ، نجد ان

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\xi\psi, \quad \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = -\left(\psi + \xi \frac{d\psi}{d\xi}\right) = (\xi^2 - 1)\psi = \xi^2\psi \text{ for } \xi \rightarrow \infty.$$

وهذا يؤكد ان معادلة (7.1.13) هي حلا تقاربيا للمعادلة (7.1.11) . نفترض ان حل معادلة (7.1.11) يكون بالصورة التالية



$$\psi(\xi) = H(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \quad \dots(7.1.14)$$

حيث  $H(\xi)$  دالة غير معروفة ويتطلب تحديدها . بتعويض معادلة (7.1.14) في معادلة (7.1.11) نحصل على

$$\frac{d^2H(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH(\xi)}{d\xi} + (\beta - 1)H(\xi) = 0 \quad \dots(7.1.15)$$

تعرف الدالة  $H(\xi)$  التي تحقق معادلة (7.1.15) **بدالة هيرمت Hermite function** . نحصل على حل المعادلة (7.1.15) بطريقة متسلسلة القوة *power series*، اي بإفتراض ان

$$H(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n + \dots \quad \dots(7.1.16)$$

يتبع ذلك ما يلي

$$\frac{dH}{d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \xi^{n-1} = 0 + a_1 + 2a_2 \xi + \dots + n a_n \xi^{n-1} + \dots$$

$$2\xi \frac{dH}{d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n \xi^n \quad \dots(7.1.17)$$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \xi^{n-2} = 0 + 0 + 2a_2 + \dots + n(n-1) a_n \xi^{n-2} + \dots \quad \dots(7.1.18)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \xi^n$$

بتعويض المعادلات (7.1.16 - 7.1.18) في معادلة (7.1.15) ، نحصل على التالي

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} + (\beta - 1 - 2n) a_n] \xi^n = 0 \quad \dots(7.1.19)$$

بما ان معادلة (7.1.15) تكون صحيحة لكل قيم  $\xi$  ، لذلك يجب ان تتلاشى معاملات كل قوة للمتغير  $\xi$  كلا على حدا . وعليه ، نحصل على ما يلي

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\beta}{(n+1)(n+2)} a_n \quad \dots(7.1.20)$$

تسمى هذه المعادلة بالعلاقة الإسترجاعية للمعاملات  $a_n$  . حيث ان هذه العلاقة تحدد المعاملات  $a_{n+2}$  بدلالة المعاملات  $a_n$  ، لذلك تحتوي سلسلة القوة (7.1.16) على اما حدود القوة الزوجية او حدود القوة الفردية للمتغير  $\xi$  فقط .

في حالة  $n = 0, 2, 4, \dots$  ، نجد ان

$$a_2 = \frac{1-\beta}{2!} a_0, \quad a_4 = \frac{(1-\beta)(5-\beta)}{4!} a_0, \quad a_6 = \frac{(1-\beta)(5-\beta)(9-\beta)}{6!} a_0$$

اما في حالة  $n = 1, 3, 5, \dots$  ، نجد ان

$$a_3 = \frac{3-\beta}{3!} a_1, \quad a_5 = \frac{(3-\beta)(7-\beta)}{5!} a_1, \quad a_7 = \frac{(3-\beta)(7-\beta)(11-\beta)}{7!} a_1$$

بما ان المعاملات الزوجية تعطى بدلالة المعامل  $a_0$  والمعاملات الفردية تعطى بدلالة  $a_1$  ، بذلك تحوي سلسلة القوة في معادلة (7.1.16) على ثابتين مطلقين هما :  $a_0$  ،  $a_1$  فقط . كذلك ، يمكن فرز حل هذه المعادلة الى سلسلة زوجية واخرى فردية كما يلي

$$H(\xi) = a_0 \left[ 1 + \frac{1-\beta}{2!} \xi^2 + \frac{(1-\beta)(5-\beta)}{4!} \xi^4 + \frac{(1-\beta)(5-\beta)(9-\beta)}{6!} \xi^6 + \dots \right] + a_1 \left[ \xi + \frac{3-\beta}{3!} \xi^3 + \frac{(3-\beta)(7-\beta)}{5!} \xi^5 + \frac{(3-\beta)(7-\beta)(11-\beta)}{7!} \xi^7 + \dots \right] \quad \dots(7.1.21)$$

$$H(\xi) = a_0 \text{ (even series)} + a_1 \text{ (odd series)} \quad \dots(7.1.22)$$

لنرى هل الحل  $\psi(\xi)$  المعبر عنه بالصورة التالية:  $\psi(\xi) = H(\xi) \exp(-\frac{1}{2}\xi^2)$  يكون حلا مقبولا فيزيائيا ام لا . اي ، هل يحقق هذا الحل الشرط التالي:  $\psi \rightarrow 0$  اذا  $\xi \rightarrow \infty$  . لبيان ذلك ، نتفحص السلوك التقاربي للدوال  $\exp(-\frac{\xi^2}{2})$  ،  $H(\xi)$  . ويتم ذلك عن طريق التعبير عن تلك الدوال بصورة سلسلة القوة . ننشر الدالة الأسية كالتالي

$$\begin{aligned} \exp(\xi^2) &= 1 + \frac{\xi^2}{1!} + \frac{\xi^4}{2!} + \frac{\xi^6}{3!} + \dots + \frac{\xi^n}{(n/2)!} + \frac{\xi^{n+2}}{\{(n+2)/2\}!} + \dots \dots \dots \infty \\ &= \sum_{n=0,2,4} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \xi^n = \sum_{n=0,2,4} b_n \xi^n ; b_n = \frac{2}{(n/2)!} \quad \dots(7.1.23) \end{aligned}$$

تكون النسبية بين اي حدين متتاليين في هذه المسلسلة كالتالي

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+1\right)!} = \frac{2}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \quad \dots(7.1.24)$$

وتكون هذه النسبة في مسلسلة  $H(\xi)$  كما يلي

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n+1-\beta}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \quad \dots(7.1.25)$$

في حالة قيم  $n$  الكبيرة ، تتصرف الدالة  $H(\xi)$  مثل الدالة  $\exp(\xi^2)$  ويصبح الحل  $\psi(\xi)$  كما يلي

$$\psi(\xi) = H(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) = \exp(\xi^2) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)$$

من الواضح عندما  $\xi \rightarrow \infty$  ، لا تبقى الدالة  $\psi$  محدودة وعليه لا يمكن اعتبارها حلا مقبولا طالما يكون  $H(\xi)$  ممثلا بالصيغة المعطاة في معادلة (7.1.22) . هناك طريقة سهلة للخروج من هذه المعضلة . اذا تلاشت كل المعاملات  $a_n$  بعد قيمة معينة من  $n$  في المسلسلة الممثلة للدالة  $H(\xi)$  فإن  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi = 0$

بسبب الحد  $\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$  . بعبارة اخرى اذا آلت الدالة  $H(\xi)$  الى صورة كثيرة حدود بعدد محدد من الحدود بدلا من مسلسلة لانهاية ، فإن هذه الدالة تكون مقبولة . من العلاقة الإسترجاعية التالية

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\beta}{(n+1)(n+2)} a_n \quad \dots(7.1.26)$$

يكون من الواضح ان هذا المتطلب يتحقق اذا كان  $\beta = 2n + 1$  لبعض قيم  $n$  ، عندها يكون

$$a_{n+2} = a_{n+4} = a_{n+6} = \dots = 0$$

ويؤدي هذا القيد على  $\beta$  الى التالي

$$\beta = \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n+1$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \dots(7.1.27)$$

تعطي معادلة (7.1.27) مجموعة من الطاقات المتقطعة للمتذبذب التوافقي ، ونلاحظ ان ادنى حالة للطاقة تكون عند  $n=0$  وتساوي  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  ، وتسمى هذه الطاقة بطاقة النقطة الصفرية *zero-point energy* . كما يتعامل القيد  $\beta = 2n + 1$  مع تتابع واحد من المعاملات، اما التتابع الزوجي للعدد  $n$  المبتدئ بالمعامل  $a_0$  او التتابع الفردي للعدد  $n$  المبتدئ بالمعامل  $a_1$  . اي ، اذا كانت  $n$  عدد صحيح زوجي ، فإن قوى  $\xi$  الزوجية تظهر في كثيرة الحدود بينما اذا كانت  $n$  عدد فردي فإن قوى  $\xi$  الفردية هي التي تظهر في كثيرة الحدود . اذا تحقق القيد  $\beta = 2n + 1$  ، فإن احدى المتسلسلات ( اما المتسلسلة الزوجية او الفردية ) هي فقط تنتهي ككثيرة حدود وتبقى الأخرى كمتسلسلة لانهاية ويمكن كتابة  $H(\xi)$  كما يلي

$$H(\xi) = a_0 (\text{polynomial}) + a_1 (\text{infinite series}) \quad \dots(7.1.28)$$

أو

$$H(\xi) = a_0 (\text{infinite series}) + a_1 (\text{polynomial}) \quad \dots(7.1.29)$$

هذا يعني انه اذا تم اعتبار  $H(\xi)$  المعطى بمعادلة (7.1.28) كدالة مقبولة للحل ، يجب اختيار  $a_1 = 0$  . وبالمثل ، اذا تم اعتبار  $H(\xi)$  المعطى بمعادلة (7.1.28) كدالة مقبولة للحل ، يجب اختيار  $a_0 = 0$  . وعليه ، تكون صيغة  $H(\xi)$  المقبولة كما يلي

$$H(\xi) = a_0 \left[ 1 - \frac{\beta-1}{2!}\xi^2 + \frac{(\beta-1)(\beta-5)}{4!}\xi^4 + \dots \right] \quad \dots(7.1.30)$$

أو

$$H(\xi) = a_1 \left[ \xi - \frac{\beta-3}{3!}\xi^3 + \dots \right] \quad \dots(7.1.31)$$

على سبيل المثال ، عند  $\beta = 9 \rightarrow n = 4$  ، تصبح المسلسلة الزوجية كثيرة حدود بالصورة التالية :

$$H(\xi) = a_0 \left[ 1 - 4\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^4 \right]$$

وعند  $\beta = 7 \rightarrow n = 3$  ، تصبح المسلسلة الفردية كثيرة حدود بالصورة التالية :

$$H(\xi) = a_1 \left[ \xi - \frac{2}{3} \xi^3 \right]$$

من المعتاد ان نختار الثوابت المطلقة  $a_0$  او  $a_1$  بحيث يكون معامل اعلى قوة للمتغير  $\xi$  في كثيرة الحدود يساوي  $2^n$  او  $2^{(\beta-1)/2}$ . تسمى كثيرات الحدود الناتجة بكثيرة حدود هيرمت *Hermite polynomials*.

على سبيل المثال، اذا كانت  $n = 4 \rightarrow \beta = 9$ ، تكون اعلى قوة للمتغير  $\xi$  تساوي 4، لذلك نختار

$$\frac{(\beta-1)(\beta-5)}{4!} a_0 = 2^4 \text{ or } \frac{4}{3} a_0 = 16 \text{ or } a_0 = 12.$$

وتصبح كثيرة حدود هيرمت كما يلي

$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$$

وبالمثل عند  $n = 3 \rightarrow \beta = 7$ ، نجد ان  $a_1 \left(-\frac{2}{3}\right) = 2^3 \rightarrow a_1 = -12$  اذن

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

وعليه، يمكن اعطاء الصيغ الرياضية لكثيرة حدود هيرمت كما يلي

$$H_0(\xi) = 1$$

$$H_1(\xi) = 2\xi$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$$

$$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$$

تتعين كثيرات حدود هيرمت ذات الرتب العالية من العلاقة الإسترجاعية التالية

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi), n \geq 1 \quad \dots(7.1.32)$$

كما تعرف كثيرات حدود هيرمت باستخدام قانون رودريغز *Rodrigues* التالي

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) \quad \dots(7.1.33)$$

حيث  $n=0,1,2,3,\dots$

اذن ، تكون دوال الموجة  $\psi(x)$  للمتذبذبات التوافقية البسيطة كالتالي

$$\Psi_n(x) = N_n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) = N_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) \quad \dots(7.1.34)$$

$$\xi = \alpha x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

ويتم تعيين الثابت  $N_n$  باستخدام شرط المعايرة كما يلي

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n(x)|^2 dx = 1$$

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \exp(-\xi^2) H_n^2(\xi) d\xi = 1$$

$$\frac{N_n^2}{\alpha} \cdot 2^n (n!) \sqrt{\pi} = 1 \quad \left\{ \because \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) H_m(\xi) H_n(\xi) d\xi = 2^n (n!) \sqrt{\pi} \delta_{mn} \right\}$$

وعليه ،

$$N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} = \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{2^{n/2}} \cdot \frac{1}{(n!)^{1/2}} \quad \dots(7.1.35)$$

فيما يلي بعض دوال الموجة للمتذبذبات التوافقية :

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

$$= \left( \frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp\left( -\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right)$$

تسمى هذه الدالة بدالة الحالة الأرضية *ground state*.

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}} (2\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

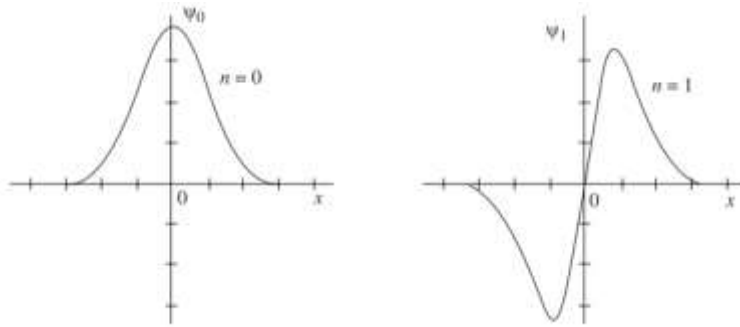
$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{8\sqrt{\pi}}} (4\alpha^2 x^2 - 2) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

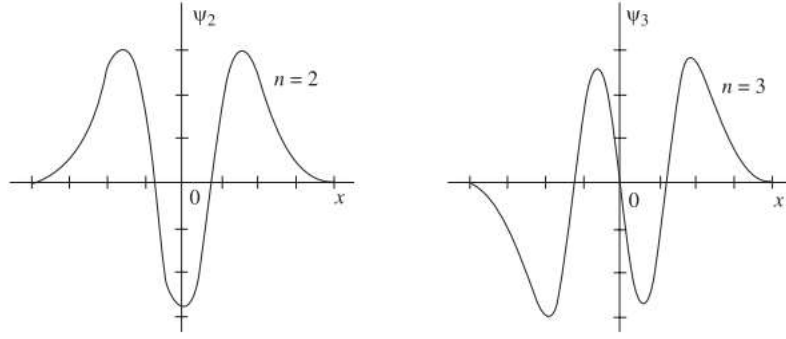
$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{48\sqrt{\pi}}} (8\alpha^3 x^3 - 12\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

$$\xi = \alpha x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x, \quad \alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$$

كما يوضح الشكل (7.1.3) رسما تخطيطيا لدوال الموجة للمتذبذب التوافقي .





شكل (7.1.3) دوال الموجة للمتذبذب التوافقي .

• احتمالية تواجد المتذبذب التوافقي ضمن الحدود الكلاسيكية

تكون دالة موجة الحالة الأرضية للمتذبذب التوافقي كما يلي

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)x^2}$$

بإستخدام قانون حفظ الطاقة ، نجد ان سعة الذبذبة  $A$  تعطى بالعلاقة التالية

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{1}{\lambda}$$

تكون احتمالية تواجد المتذبذب في الحدود الكلاسيكية كالتالي

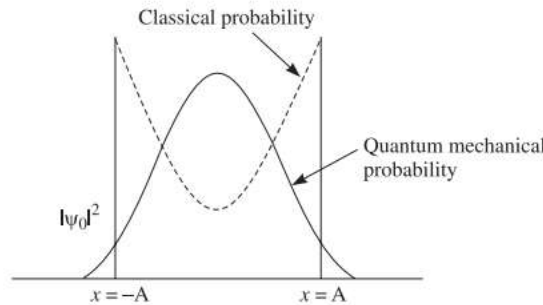
$$P_0 = \int_{-A}^A |\Psi_0(x)|^2 dx = 2 \int_0^A |\Psi_0(x)|^2 dx$$



$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{1/\lambda} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \right) e^{-\lambda^2 x^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-z^2} dz \quad \text{where} \quad \lambda x = z \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left( 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \dots \right) dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left( 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \dots \right) dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} - \frac{z^7}{42} + \dots \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots \right) \\
&= 0.83.
\end{aligned}$$

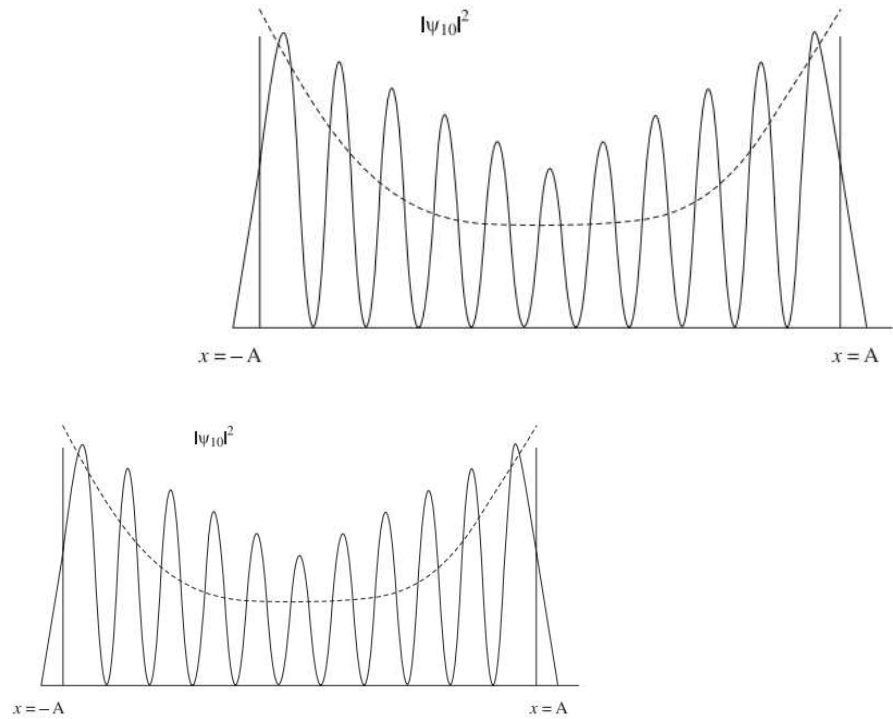
اي ان احتمالية تواجد المتذبذب في الحالة الأرضية خارج الحدود الكلاسيكية تساوي 17%.

يبين الشكل (7.1.4) احتمالية تواجد المتذبذب كلاسيكيا وكميا .



شكل (7.1.4) دالة احتمالية تواجد المتذبذب الكلاسيكية والكمية في الحالة الأرضية .

كما يوضح الشكل (7.1.5) احتمالية تواجد المتذبذب وفق ميكانيكا الكم في الحالة  $\psi_{10}$  ، كما نلاحظ التوافق بين دالتي الإحتمال كلاسيكيا وكميا عندما تكون قيمة  $n$  كبيرة جدا ( $n \rightarrow \infty$ ) .



شكل (7.1.5) دالة احتمال الميكانيكية الكمية للمتذبذب في الحالة  $\psi_{10}$  .

### • مبدأ التقابلية Correspondence Principle

عند الزمن  $t$  ، يكون موقع وسرعة المتذبذب كما يلي

$$x = A \cos \omega t$$

$$v = -\omega A \sin \omega t = \omega A \left[ 1 - \frac{x^2}{A^2} \right]^{1/2}$$

نفرض ان  $\Delta t$  هو الزمن الذي يستغرقه المتذبذب لعمل ازاحة  $\Delta x$  . تعرف احتمالية تواجد المتذبذب الكلاسيكية في هذه المنطقة كجزء من الزمن الذي يستغرقه هذا المتذبذب خلال هذه المنطقة . اي ،

$$P_c(x) dx = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta x / v}{2\pi / \omega} = \frac{1}{2\pi A} \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}}$$

من هذه العلاقة نجد ان عند  $x = \pm A$  تقترب الإحتمالية الكلاسيكية من المالاانهاية ( $P_c \rightarrow \infty$ ) و تكون هذه الإحتمالية صغرى عند  $x = 0$  . اما بين نقاط التحول الكلاسيكية فتكون لها قيم غير صفرية . تختلف الإحتمالية الكمية P لتواجد المتذبذب بشكل ملحوظ عن الإحتمالية الكلاسيكية بين هذه النقاط عند  $n=0$  ( الحالة الأرضية ).

عند  $n > 0$  ، يوجد قمم *peaks* للإحتمالية الكمية  $P_{quantum}$  بين النقاط  $x = \pm A$  ، ويزداد عدد هذه القمم مع ازدياد قيمة  $n$  وتصبح هذه القمم مكتظة ، وتندمج هذه القمم معا عند المنتهى ( $n \rightarrow \infty$ ) وتقترب  $P_{quantum}$  من الإحتمالية الكلاسيكية . وهذا يعرف بمبدأ بور التقابلي *Bohr principle* . *correspondence* .

---

## تمارين

(1) اذا كانت حركة جسيم كتلته  $m$  في بعد واحد تعطى بالعلاقة التالية

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi^2 = E\psi.$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi^2 = E\psi.$$

جد القيم الذاتية لطاقة هذا الجسيم .

(2) (a) اذا كانت الدالة الذاتية وطاقة متذبذب توافقي في بعد واحد وفي الحالة  $n$  تعطى كما يلي

$$\psi_n(x) = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2} H_n(\alpha x) \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2\right), \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$$

حيث

$$\alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar} \quad \text{and} \quad H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2).$$

ارسم دالة الموجة وكثافة الاحتمال للحالة  $n=2$  .

(b) عمم هذه النتائج للحصول على دالة الموجة والقيم الذاتية للطاقة في حالة حركة المتذبذب في بعدين .

(3) اذا وصفت حركة جسيم كتلته  $m$  في البعد الواحد بدالة هملتون التالية

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + c_1 x + c_2 x^2$$

حيث  $c_2, c_1$  ثوابت . جد القيم الذاتية لهذا الجسيم .

(4) اذا وصفت حركة متذبذب توافقي خطي في الحالة النونية بمعادلة الموجة التالية

$$\psi_n = C_n \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi),$$

حيث

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

جد  $\langle x^2 \rangle$  و القيمة المتوقعة لطاقة الجهد اذا كان المتذبذب في مستوى الطاقة الأول . ( استخدم التكامل التالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^n \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

(5) اذا كانت دالة موجة متذبذب توافقي في بعد واحد تعطى بالعلاقة التالية

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n (n!) \sqrt{\pi}}} \exp(-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2) H_n(\alpha x), \text{ where } \alpha = \left( \frac{mk}{\hbar^2} \right)^{1/4}$$

(a) ارسم دالة الموجة وكثافة الإحتمال في حالة  $n=1$  مع المتغير  $x$ .

(b) اكتب طاقة ودالة موجة المتذبذب في بعدين وذلك بتعميم النتائج السابقة للبعد الواحد. جد انحلالية الحالة المستثارة الأولى في حالة المتذبذب في بعدين .

(6) اذا كانت الدالة المولدة لكثيرة حدود هيرمت تعطى بالعلاقة التالية

$$\exp(2zx - z^2) \text{ or } \exp[x^2 - (z-x)^2].$$

استخدم هذه العلاقة لإيجاد ثابت المعايرة .

(7) (a) اذا كانت دالة موجة متذبذب توافقي في بعد واحد هي

$$\Psi_n(x) = N_n \exp(-\lambda x^2 / 2) H_n(\sqrt{\lambda} x), \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}, \xi = \sqrt{\lambda} x,$$

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2)$$

ارسم دوال الموجة وكثافات الإحتمال للحالات الثلاثة الأولى ، ثم عين التعادلية  $parity$  لكل حالة .

(b) عمم النتائج السابقة لإيجاد القيم الذاتية للطاقة والدوال الذاتية في حالة المتذبذب المتمائل في بعدين ، جد انحلالية الحالة المستثارة الأولى.

(8) (a) اذا كانت الدالة المولدة لكثيرة حدود هيرمت تعطى كالتالي

$$S(\xi, s) = \exp[\xi^2 - (s - \xi)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n$$

برهن ان

$$H_n''(\xi) - 2\xi H_n' + 2nH_n(\xi) = 0.$$

(b) ناقش اصل نقطة الطاقة الصفرية في هذا المتذبذب.

(9) اذا كانت دالة الموجة للحالة الأرضية لمتذبذب توافقي خطي كتلته  $m$  تعطى كالتالي

$$\psi_0(x) = A \exp(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2)$$

حيث  $A$  ثابت المعايرة ،  $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$  . جد القيمة المتوقعة لطاقة الجهد  $V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$  في الحالة الأرضية السابقة .

## الفصل الثامن: المدوار الصلب

### Rigid Rotator

نتناول في هذا الفصل دراسة معادلة الحركة للمدوار ( الجسم الصلب) حول محور ثابت

#### (8.1) مقدمة Introduction

هو عبارة عن نظام مكون من جسيمين متباعدين بمسافة ثابتة ويدوران حول محورا مارا بمركز ثقلهما و يكون متعامدا على اتجاه الخط الواصل بينهما . اذا كان المستوى المحتوي على هذين الجسيمين ثابتا في الفضاء اثناء عملية الدوران ، فإن هذا المدوار يعرف بالمدوار ثابت المحور *fixed axis* . بينما اذا كان محور الدوران حرا في اتخاذ اي موقع في الفضاء ، فإن المدوار يعرف بـ *بمدوار المحور الحر free axis* . فمثلا ، يمكن ان نتعامل مع الجزئ الصلب ثنائي الذرة كمدوار صلب بمحور ثابت . في هذا البند سنتناول تهيئة معادلة شرودنجر للمدوار الصلب ومن ثم ايجاد القيم الذاتية والدوال الذاتية لهذه المعادلة .

لنفرض ان  $m_1, m_2$  هما كتلتا جسيمي المدوار ،  $r_1, r_2$  هما بعداهما عن مركز ثقل المدوار ،  $r$  تمثل المسافة بينهما . من تعريف مركز الثقل ، نجد ما يلي

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad \dots(8.1.1)$$

$$r_1 + r_2 = r \quad \dots(8.1.2)$$

من هاتين المعادلتين نستطيع ايجاد  $r_1, r_2$  بدلالة  $r$  . أي ،

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \quad \dots(8.1.3)$$

يكون عزم القصور الذاتي ( الخمالة ) للمدوار حول المحور المار بمركز الثقل والمتعامد مع الخط الواصل بين الجسيمات كما يلي

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2 \quad \dots(8.1.4)$$

حيث  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  ، وتعرف هذه الكمية بكتلة النظام المختزلة *reduced mass* .

كما تكون طاقة الجسيم الحركية في الفضاء بدلالة الإحداثيات الكارتيزية كما يلي

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \dots(8.1.5)$$

في حالة استخدام الإحداثيات الكروية ، تكون صيغة الطاقة الحركية للجسيم كما يلي

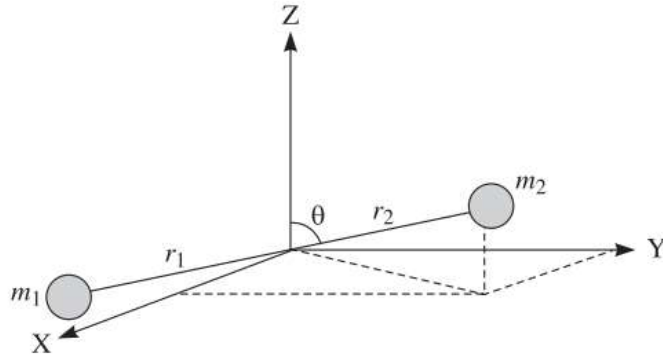
$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad \dots(8.1.6)$$

إذا كانت  $r$  ثابتة ( في حالة حركة الجسيم على سطح كرة ) فإن  $\dot{r} = 0$  ، وتصبح معادلة (8.1.6) على الشكل التالي

$$T = \frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad \dots(8.1.7)$$

في حالة المدوار الصلب ( الشكل 8.1.1 ) ، تكون الطاقة الحركية للنظام تساوي مجموع طاقتي حركة الجسمين ، أي

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}m_2r_2^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad \dots(8.1.8)$$



شكل (8.1.1) الإحداثيات الكروية لجسيمات مدوار صلب .

في حالة المدوار الصلب المتحرك في فضاء حر ، تكون طاقة الوضع ( الجهد ) تساوي الصفر . وعليه ، تكون الطاقة الكلية لهذا المدوار في الإحداثيات الكروية كما يلي



$$E = T = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

$$E = \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta), I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad \dots(8.1.9)$$

مقارنة معادلة (8.1.8) مع معادلة (8.1.9) يظهر ان المدوار الصلب يسلك مثل جسيم منفرد كتلته I ويتحرك على سطح كروي بنصف قطر ثابت مساويا للوحدة .

حيث ان معادلة شرودنجر لجسيم كتلته m ، في الإحداثيات الكروية ، تكون كالتالي

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) = 0$$

للحصول على معادلة المدوار الصلب ، نستبدل m بالكمية I ونضع  $r=I$  ،  $V=0$  في المعادلة السابقة ، أي

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2IE}{\hbar^2} \psi = 0 \quad \dots(8.1.10)$$

يمكن اشتقاق معادلة (8.1.10) بإستخدام دالة هملتون ، ويكون ذلك كالتالي

في حالة طاقة الجهد الصفرية ، تكون دالة هملتون للمدوار الصلب كما يلي

$$H = T = \frac{L^2}{2I} \quad \dots(8.1.11)$$

حيث L الزخم الزاوي للمدوار الصلب ، كما يكون مؤثر هملتون المقابل كالتالي

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad \dots(8.1.12)$$

تكون معادلة قيم الطاقة الذاتية لهذا المدوار كالتالي

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \psi = E\psi \quad \dots(8.1.13)$$

وهذه المعادلة هي نفس معادلة (8.1.10) .

لحل معادلة (8.1.13) نفرض ان هذا الحل يكون على الصورة التالية

$$\psi(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad \dots(8.1.14)$$

بتعويض معادلة (8.1.14) في معادلة (8.1.13) ، نحصل على ما يلي

$$\frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \beta \sin^2\theta + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0 \quad \dots(8.1.15)$$

حيث

$$\beta = \frac{2IE}{\hbar^2} \quad (8.1.16)$$

بنقل حدود  $\Phi$  الى الطرف الأيمن في معادلة (8.1.13) ، نحصل على التالي

$$\frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \beta \sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \quad \dots(8.1.17)$$

نلاحظ ان كل طرف في معادلة (8.1.17) هو بدلالة متغير واحد فقط ، وهذا يحدث اذا كان كل طرف يساوي نفس الثابت، لنفرض ان هذا الثابت هو  $m^2$  . لذلك ، يمكن فصل معادلة (8.1.17) الى معادلتين :

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \beta - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0 \quad \dots(8.1.18)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \quad \dots(8.1.19)$$

يكون حل معادلة (8.1.19) على الصورة التالية

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \quad \dots(8.1.19)$$

يكون حل معادلة (8.1.19) كما يلي

$$\Phi = C e^{im\varphi} \quad \dots(8.1.20)$$

بما ان  $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$  ، نحصل على  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ،  $e^{\pm 2\pi i m} = 1 \Rightarrow$  نحصل على قيمة الثابت C في معادلة (8.1.20) باستخدام شرط المعايرة ، اي

$$\int_0^{2\pi} \Phi \Phi^* d\varphi = 1 \quad \dots(8.1.21)$$

$$\int_0^{2\pi} C e^{2\pi i m \varphi} \cdot C e^{-2\pi i m \varphi} d\varphi = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

وعليه ، يكون حل معادلة  $\Phi$  - كما يلي

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots(8.1.22)$$

لحل معادلة (8.1.18) ، نحول هذه المعادلة الى صورة اسهل باستبدال المتغير  $\theta$  بمتغير آخر  $x$  ويكون ذلك كما يلي

$$x = \cos \theta, \quad \sin \theta = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

$$\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} = -\sin^2 \theta \frac{d\theta}{dx} = -(1-x^2) \frac{d\theta}{dx}$$

باستخدام هذه النتائج ، تصبح معادلة (8.1.18) كالتالي

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d\theta}{dx} \right\} + \left( \beta - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \theta = 0, \quad -1 < x < 1 \quad \dots(8.1.23)$$

تشبه هذه المعادلة معادلة ليجندر المرافقة :

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{dF}{dx} \right\} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} F = 0 \quad \dots(8.1.24)$$

بكتابة الثابت  $\beta$  في معادلة (8.1.23) بصورة  $\beta = l(l+1)$  حيث  $l$  ثابت آخر ، نحصل على

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right\} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \Theta = 0 \quad \dots(8.1.25)$$

$$\beta = l(l+1) = (2IE)/\hbar^2 \quad \dots(8.1.26)$$

يكون للمعادلة (8.1.25) حل منفرد ومحدود فقط في حالة قيم  $\beta$  المعينة التالية

$$\beta = l(l+1) = 0, 2, 6, 12, 20, \dots \quad \dots(8.1.27)$$

أو

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad \dots(8.1.28)$$

بتعويض قيم  $\beta$  في معادلة (8.1.27) ، نحصل على

$$E = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.1.29)$$

تعطي هذه المعادلة قيم طاقة المدار الصلب الممكنة . وتشكل هذه الطاقة طيفا متقطعا *discrete spectrum* . من المؤلف التعبير عن هذه الطاقة بالصورة التالية

$$E_l = Bch l(l+1) \quad \dots(8.1.30)$$

حيث

$$B = h/8\pi^2 Ic.$$

وعليه ، يكون التباعد بين مستويات الطاقة المتتالية كالتالي

$$E_l - E_{l-1} = Bch [l(l+1) - l(l-1)] = 2Bchl$$

• دوال موجة المدوار الصلب

في حالة  $m=0$  ، تكون صيغة معادلة ليجندر المرافقة على النحو التالي

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right\} + l(l+1)\Theta = 0 \quad \dots(8.1.31)$$

يعبر عن الحل المقبول لمعادلة (8.1.30) بصورة كثيرة الحدود ، المعروفة بإسم كثيرة حدود ليجندر ، التي تمثل بالرمز  $P_l(x)$  وهي على الصورة الرياضية التالية

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad \dots(8.1.32)$$

من هذه المعادلة ، يمكن الحصول على الصيغ الرياضية لكثيرة حدود ليجندر وتكون كالتالي

$$l = 0, \quad P_0(x) = 1$$

$$l = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$l = 2, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$l = 3, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$l = 4, \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

كما يمكن الحصول على الصيغ الرياضية لكثيرة الحدود بالرتب العالية باستخدام العلاقة الإسترجاعية التالية

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1} x P_l(x) - \frac{l}{l+1} P_{l-1}(x) \quad \dots(8.1.33)$$

تشكل كثيرة حدود ليجندر نظام متعامد في الفترة  $-1 \leq x \leq 1$  ، اي

$$\int_{-1}^1 P_l^*(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad \dots(8.1.34)$$

كما تكون قيمة مربع المعيار  $norm$  لكثيرة حدود ليجندر كالتالي

$$\int_{-1}^1 P_l^*(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \quad \dots(8.1.35)$$

الحلول المحدودة لمعادلة (8.1.24) في الفترة  $[-1, +1]$ ، لقيم  $m$  الموجبة، هي كثيرة حدود ليجندر المرافقة، التي يرمز لها بالرمز  $P_l^m(x)$  وتعرف كما يلي

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad m \leq l \\ &= (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{1}{2^l (l!)} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \right] \end{aligned} \quad \dots(8.1.36)$$

كما تحقق كثيرة حدود ليجندر الشرط التالي

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk} \quad \dots(8.1.37)$$

تكون العلاقة الإسترجاعية لكثيرة حدود ليجندر المرافقة كما يلي

$$x P_k^m(x) = \frac{(l-m)(l-m+1)}{2l+1} P_{l+1}^m(x) + \frac{l+m}{2l+1} P_{l-1}^m(x) \quad \dots(8.1.38)$$

$$\sqrt{1-x^2} P_l^{m+1}(x) = \frac{(l-m)(l-m+1)}{2l+1} P_{l+1}^m(x) - \frac{(l+m)(l+m+1)}{2l+1} P_{l-1}^m(x) \quad \dots(8.1.39)$$

يكون حل معادلة (8.1.25) كالتالي

$$\Theta_l^m(x) = N_{lm} P_l^m(x) \quad \dots(8.1.40)$$

حيث  $N_{lm}$  ثابت المعايرة ويمكن إيجاده بإستخدام الشرط المعطى في معادلة (8.1.37). وعليه، يكون الحل العير لمعادلة (8.1.25) كما يلي

$$\begin{aligned} \Theta_{lm}(x) &= \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(x) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (1-x^2)^{m/2} \cdot \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{1}{2^l (l!)} \cdot \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \right] \end{aligned} \quad \dots(8.1.41)$$

اخيرا ، يكون الحل التام لمعادلة  $\theta$  – (8.1.13) على الصورة التالية

$$\begin{aligned}\psi(\theta, \varphi) &= \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\varphi} \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m} P_l(\cos\theta) \quad \dots(8.1.42)\end{aligned}$$

لإشارة  $m$  السالبة ، نحصل على حل معادلة شرودنجر للمدوار الصلب باستخدام العلاقة التالية

$$\psi_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m [\psi_{l,m}(\theta, \varphi)]^* \quad \dots(8.1.43)$$

تسمى الدوال  $\Psi(\theta, \varphi)$  المعرفة بمعادلة (8.1.42) **بالتوافقات الكروية spherical harmonics** وعادة يعبر عنها بالرمز  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  . تكون هذه الدوال حلول معادلة (8.1.13) . في الحقيقة تكون الدوال الذاتية لمؤثر هاملتون لجسيم متحرك على سطح كروي هي توافقات كروية دائما .

يكون المعنى الفيزيائي للدالة  $\Psi(\theta, \varphi)$  هو ان الكمية  $|\Psi(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$  ، حيث  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  ، تمثل احتمالية تواجد محور المدوار المؤشر في وحدة الزاوية المجسمة  $d\Omega$  حول الإتجاهات  $\theta, \varphi$  . فيزيائيا ، يعتبر المدوار الصلب نموذجا بسيطا لثنائي الجزيء الصلب *rigid diatomic molecules* .

## تمارين

(1) اكتب تعبيراً لمعادلة موجة شرودنجر للمدوار الصلب ، استخدم هذه المعادلة لإيجاد دالة الموجة ومستويات الطاقة .

(2) اشتق معادلة (8.1.6) باستخدام العلاقة بين الإحداثيات الكروية والكارتيزية .

(3) اشتق معادلة (8.1.23) باستخدام معادلة (8.1.18) وعلاقة التحويل  $x = \cos \theta$  .

(4) برهن ان التباعد بين مستويات طاقة المدوار الصلب تتناسب طردياً مع الرقم الكمي للمستوى  $l$  .

(5) جد التعبير الرياضي ( بدلالة  $x$  ) لكثيرة حدود ليجندر  $P_5(x)$  باستخدام معادلة (8.1.32) .

(6) برهن ان :  $\int_{-1}^1 P_3^*(x)P_3(x)dx = 2/7$

(7) استخدم معادلة (8.1.38) لإيجاد  $P_3(x)$  ؟

(8) جد قيمة المقدار التالي:

$$\int_{-1}^1 |P_4^3|^2 dx$$

(9) باستخدام معادلة (8.1.42) ، جد الدالة  $\Psi_{2,2}(\theta, \varphi)$  ؟

(10) جد  $\Psi_{2,-2}(\theta, \varphi)$  ؟



## الفصل التاسع : جسيم في مجال قوة مركزي

### Particle in a Central Force Field

يتناول هذا الفصل طريقة تحويل مسألة الجسمين الى معادلتين مكافئتين لكل جسم منهما في حالة الحركة في مجال مركزي، كما يشرح حل معادلة شرودنجر لذرة الهيدروجين باستخدام نظام الإحداثيات الكروية . كما يقدم مفهوم الأعداد الكمية الناتجة من شروط هذا الحل. كما يدرس مبدأ التشعبية لحالة المستويات وخواص الدوال الموجية لذرة الهيدروجين.

(9.1) إختزال مسألة ثنائي الجسم الى مسألتين مكافئتين من احادي الجسم في قوة مركزية

### Reduction of Two- Body Problem in Two Equivalent One-Body Problem in a Central Force

تتوقف طاقة جهد الجسيم الموضوع في مجال مركزي متمائل على البعد بين هذا الجسيم ومركز القوة فقط . اي يعبر عن هذه الطاقة بالرمز  $V = V(r)$  . ويكون مؤثر هملتون لهذا الجسيم على النحو التالي

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(r) \quad \dots(9.1.2)$$

لنفرض ان نظاما ما يتكون من جسيمين يتحركان تحت تأثير تفاعلها المتبادل والذي يوصف بجهد متمائل كرويا. بسبب التماثل المركزي لمجال القوة ، يمكن استخدام الإحداثيات القطبية *polar coordinates* كوسيلة لحل هذه المسألة . تعتبر ذرة الهيدروجين ، التي يكون فيها الكترون متحركا حول النواة تحت تأثير التفاعل المتبادل بينهما ، مثالا مشهورا على مسألة ثنائي الجسم في القوة المركزية. في الميكانيكا الكلاسيكية ، تكون طاقة هذا النظام كما يلي

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(r) \quad \dots(9.1.2)$$

ومؤثر هملتون هو

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(r)$$

حيث  $m_1, m_2$  هما كتلتا الجسميين ،  $p_1, p_2$  هما الزخم الخطي لهما . وعليه ، تكون معادلة شرودنجر للنظام كما يلي

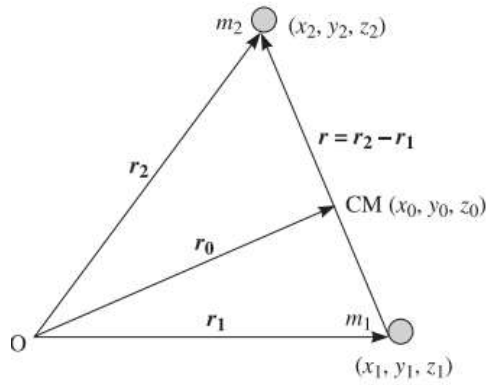
$$\hat{H}\psi = E\psi$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(r) \right] \psi = E\psi \quad \dots(9.1.3)$$

لنفرض ان  $r_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $r_2(x_2, y_2, z_2)$  تمثل مواقع الجسمين على الترتيب ( الشكل 9.1.1 ) ، وان موقع مركز ثقل هذا النظام هو  $r_0(x_0, y_0, z_0)$  ، حيث

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_0 = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_0 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

لنفرض ان المتجه  $r(x, y, z)$  هو متجه موقع الجسم الثاني بالنسبة للجسم الأول ( المتجه النسبي ) والمعروف كالتالي



شكل (9.1.1) مسألة ثنائي الجسم في قوة مركزية .

$$r = r_2 - r_1$$

أو

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1 \quad \dots(9.1.4)$$

باستخدام قواعد التفاضل ، نجد ان

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 = \left( -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial x_0} \right)^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} + \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\end{aligned}\quad \dots(9.1.5)$$

بالمثل ،

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \quad \dots(9.1.6)$$

من المعادلات (9.1.5) و (9.1.6) ، نحصل على التالي

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \quad \dots(9.1.7)$$

بالمثل ،

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \quad \dots(9.1.8)$$

$$\frac{1}{m_1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \quad \dots(9.1.9)$$

بجمع المعادلات (9.1.7-9.1.9) معا ، نحصل على ما يلي

$$\frac{1}{m_1} \nabla_1^2 + \frac{1}{m_2} \nabla_2^2 = \frac{1}{\mu} \nabla_r^2 + \frac{1}{m_1 + m_2} \nabla_0^2 \quad \dots(9.1.10)$$

حيث  $\nabla_0^2$  ,  $\nabla_r^2$  هي مؤثرات لابلاس *Laplacian operator* بالنسبة لمكونات متجهات المواقع  $r, r_0$  على الترتيب،

= الكتلة المختصرة للنظام .

يكون مؤثر هملتون لهذا النظام كما يلي

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_0^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \quad \dots(9.1.11)$$

تبين معادلة (9.1.11) ان دالة الهملتون تتكون من مجموع دالتين هملتونيتين مستقلتين : احدهما تحوي على كتلة النظام الكلية ومتجة موقع مركز الثقل ، والاخرى تحوي على الكتلة المختصرة ومتجه الترتيب المتبادل للجسيمين . تكون معادلة شرودنجر كالتالي

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_0^2 \psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi + V(r)\psi = E\psi \quad \dots(9.1.12)$$

نبحث عن حل لمعادلة (9.1.12) بحيث يكون على صورة حاصل ضرب دالتين ، اي

$$\psi = \psi_0(x_0, y_0, z_0) \psi_r(x, y, z) \quad \dots(9.1.13)$$

بتعويض معادلة (9.1.13) في معادلة (9.1.12) ، نحصل على ما يلي

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_0^2 \psi_0 \right\} + \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi_r + V(r) \right\} = E \quad \dots(9.1.14)$$

تبين معادلة (9.1.14) ان لأي من قيم  $r_0, r$  يجب ان يكون مجموع المقدارين في الأقواس يساوي كمية ثابتة E . هذا يكون ممكنا اذا كل مقدار في القوس يساوي ثابتا خاصا به ومجموع هذه الثوابت يساوي E . تباعا نحصل لاعلى معادلتي تفاضليتين هما:

$$(i) \quad -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \nabla_0^2 \psi_0 = E_0 \psi_0 \quad \dots(9.1.15)$$

$$(ii) \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 \psi_r + V(r) \psi_r = E_r \psi_r \quad \dots(9.1.16)$$

حيث

$$E_0 + E_r = E \quad \dots(9.1.17)$$

معادلة (9.1.15) هي معادلة شرودنجر لجسيم حر كتلته  $(m_1 + m_2)$  وتصف الحركة الإنتقالية للنظام بأكمله. و من الواضح ان  $E_0$  هي الطاقة الحركية للنظام المتحرك ككل.

كما تصف معادلة (9.1.16) حركة جسيم خيالي كتلته  $\mu$  يتحرك في مجال قوة مركزي مميزا بطاقة جهد  $V(r)$ . وتختلف هذه المعادلة عن معادلة شرودنجر لجسيم في مجال قوة مركزية فقط بإحتوائها على كتلة النظام المختصرة بدلا من كتلة الجسيم الواحد. كما ان الطاقة  $E_r$  هي طاقة النظام الداخلية *internal energy*.

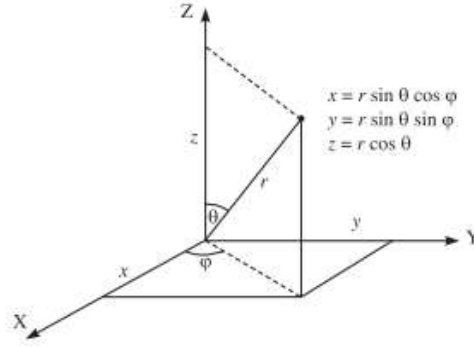
## (9.2) ذرة الهيدروجين *Hydrogen Atom*

ذرة الهيدروجين هي نظام مكون من إلكترون وبروتون متحركين تحت تأثير تفاعلها المتبادل. تكون معادلة شرودنجر لهذا النظام كالتالي

$$\nabla^2 \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad \dots(9.2.1)$$

حيث  $E$  الطاقة الداخلية للنظام و تكون طاقة الجهد الكهروستاتيكي كما يلي:  $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ . بما ان طاقة الجهد هي دالة للموقع  $r$ ، لذلك نستخدم الإحداثيات الكروية (الشكل 9.2.1) لحل معادلة شرودنجر التي تعطى بالصورة التالية

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad \dots(9.2.2)$$



شكل (9.2.1) الإحداثيات الكروية لموقع نقطة في الفضاء.

حيث دالة الموجة  $\psi$  هي دالة للمتغيرات  $(r, \theta, \varphi)$ . بضرب معادلة (9.2.2) بالمقدار  $r^2 \sin^2 \theta$ ، نحصل على

$$\sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2\mu r^2 \sin^2 \theta}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (9.2.3)$$

نفرض ان دالة الموجة هي على صورة حاصل ضرب ثلاث دوال مستقلة كالتالي

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad \dots(9.2.4)$$

من هذه العلاقة، نجد ان

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \Theta \Phi \frac{dR}{dr}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = R \Phi \frac{d\Theta}{d\theta}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = R \Theta \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad \dots(9.2.5)$$

بتعويض هذه القيم في معادلة (9.2.3) وقسمة المعادلة الناتجة على  $R \Theta \Phi$ ، نحصل على التالي

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{2\mu r^2 \sin^2 \theta}{\hbar^2} (E - V) = 0$$

أو

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{2\mu r^2 \sin^2 \theta}{\hbar^2} (E - V) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad \dots(9.2.6)$$

في معادلة (9.2.6)، يكون طرف المعادلة الأيسر دالة للمتغيرات  $r, \theta$  بينما يكون طرفها الأيمن دالة للمتغير  $\varphi$  فقط. هذا لا يتحقق إلا إذا كل طرف في هذه المعادلة يساوي نفس الثابت ويسمى ثابت الفرز الذي يرمز له بالرمز  $m_l^2$ ، وعليه، نحصل على ما يلي

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m_l^2\Phi \quad \dots(9.2.7)$$

$$\frac{\sin^2\theta}{R} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin\theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{2\mu r^2 \sin^2\theta}{\hbar^2} (E - V) = m_l^2 \quad \dots(9.2.8)$$

بقسمة معادلة (9.2.8) على المقدار  $\sin^2\theta$  ونقل حدود المتغير الواحد وتربيتها في كل طرف، نحصل على التالي

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V) = \frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right)$$

بمساواة كل طرف في هذه المعادلة بنفس الثابت، نحصل على معادلتين كل منهما تعتمد على متغير واحد فقط مما يسهل حلها ويكون ثابت الفرز مساويا للمقدار  $l(l+1)$ ، أي

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} (E - V) = l(l+1) \quad \dots(9.2.9)$$

$$\frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = l(l+1) \quad \dots(9.2.10)$$

للسهولة نكتب المعادلات الثلاثة السابقة، حيث تكون كل معادلة هي دالة لمتغير وحيد، بالصورة التالية

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m_l^2\Phi = 0 \quad \dots(9.2.11)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left\{ l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2\theta} \right\} \Theta = 0 \quad \dots(9.2.12)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2} \left( E - V - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right) \right] R = 0 \quad \dots(9.2.13)$$

في معادلة (9.2.13) نلاحظ ظهور حد جديد مضافا الى طاقة الجهد  $V(r)$  وهو الحد  $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$  ويسمى طاقة الجهد المركزية حيث ان سالب تحدره  $gradient$  يساوي القوة المركزية المؤثرة على الحسيم اثناء دورانه في مسار دائري نصف قطره  $r$  . كما تكون الطاقة الحركية المصاحبة للحركة الدورانية كالتالي :

$$\frac{L^2}{2I} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$

هكذا يمكن اعتبار هذا الحد كطاقة الطرد المركزي للجسيم . يكون حل معادلة  $\Phi - (9.2.11)$  كما يلي

$$\Phi(\varphi) = A e^{im_l \varphi}$$

حيث  $A$  ثابت . كي تكون الدالة  $\Phi(\varphi)$  ذات قيمة منفردة يجب ان تحقق الشرط التالي

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \Rightarrow \exp(i2\pi m_l) = 1$$

$$\cos 2\pi m_l + i \sin 2\pi m_l = 1$$

$$\cos 2\pi m_l = 1$$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

...(9.2.14)

يعرف ثابت الفرز  $m_l$  بالعدد الكمي المغناطيسي  $magnetic\ quantum\ number$  . تحدد قيمة الثابت  $A$  باستخدام شرط العايرة. اي ،

$$\int_0^{2\pi} \Phi^*(\varphi)\Phi(\varphi)d\varphi = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

تصبح دالة  $\Phi(\varphi)$  المعاييرة كما يلي

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im_l \varphi) \quad \dots(9.2.15)$$

اما طريقة ايجاد حل المعادلة (9.2.12) فإنها تكون معقدة . ويمكن ايجاد الحلول المحددة وحسنة التصرف  $well-behaved$  اذا تحقق الشرط التالي

$$l \geq |m_l| \quad \text{or} \quad |m_l| \leq l$$



ويمكن التعبير عن هذا الشرط بالصيغة التالية

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l \quad \dots(9.2.16)$$

يسمى الثابت  $l$  بالعدد الكمي المداري *orbital quantum number* .

قبل البدء بحل معادلة (9.2.12) ، يكون من البساطة ان نستخدم التحويل التالي  $x = \cos \theta$  . وعليه ، نحصل على معادلة تعرف بمعادلة ليجندر المرافقة ويعبر عن حلولها المقبولة بصورة كثيرات الحدود ، المعروفة بدوال ليجندر المرافقة . بما ان كثيرات الحدود هذه تعتمد على  $l$  ،  $m_l$  ، لذلك يرمز لها بالرمز  $\Theta_{l,m_l}$  . وتكون كثيرات حدود ليجندر المعاييرة ، لقيم  $m_l$  الموجبة ، كما يلي

$$\Theta_{l,m_l}(x) = (-1)^{m_l} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m_l)!}{(l+m_l)!}} \cdot (1-x^2)^{m_l/2} \cdot \frac{d^{m_l}}{dx^{m_l}} \left( \frac{1}{2^l (l!)} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \right)$$

أو

$$\Theta_{l,m_l}(\theta) = (-1)^{m_l} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m_l)!}{(l+m_l)!}} \cdot P_l^{m_l}(\cos \theta) \quad \dots(9.2.17)$$

اما لقيم  $m_l$  السالبة ، نجد ان

$$\Theta_{l,m_l}(\theta) = (-1)^{m_l} \left[ \Theta_{l,-m_l} \right]^* \quad \dots(9.2.18)$$

فيما يلي نقدم الصيغ الرياضية لبعض كثيرات حدود ليجندر المرافقة والمعايرة ، ويعرف حاصل الضرب  $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  بالتوافقات الكروية  $Y_{l,m_l}(\theta, \varphi)$  .

$l$	$m_l$	$\Theta(\theta)$	$Y(\theta, \varphi)$
0	0	$\Theta_{00} = 1/\sqrt{2}$	$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
1	0	$\Theta_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cos \theta$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos \theta$
1	$\pm 1$	$\Theta_{1\pm 1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \theta$	$Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\Theta_{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10}(3\cos^2 \theta - 1)$	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2 \theta - 1)$
2	$\pm 1$	$\Theta_{2\pm 1} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \sin \theta \cos \theta$	$Y_{2,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cdot (\cos \theta \cdot \sin \theta) \cdot e^{\pm i\varphi}$
2	$\pm 2$	$\Theta_{2\pm 2} = \frac{1}{4}\sqrt{15} \sin^2 \theta$	$Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \cdot \sin^2 \theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}$

• حل المعادلة الشعاعية *solution of Radial Equation*

في الحالة المقيدة *bound state*، تكون الطاقة  $E$  سالبة بحيث تصبح المعادلة الشعاعية كما يلي

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[ \frac{2\mu(-E)}{\hbar^2} + \frac{2\mu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad \dots(9.2.19)$$

ويمكن اعادة كتابة هذه المعادلة بصورة مبسطة باستخدام التحويل التالي

$$\rho = \alpha r \quad \dots(9.2.20)$$

حيث  $\alpha$  ثابت . وعند تعويض معادلة (9.2.20) في معادلة (9.2.19) ، نجد ان

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + \left[ \frac{-2\mu E}{\hbar^2 \alpha^2} + \frac{2\mu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \alpha \hbar^2 \rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R = 0 \quad \dots(9.2.21)$$

يتم اختيار قيمة  $\alpha$  بحيث تجعل قيمة الحد الأول في القوس الثاني لمعادلة (9.2.21) تساوي  $\frac{1}{4}$  . وعليه ،

$$\alpha = \sqrt{\frac{-8\mu E}{h^2}} \quad \dots(9.2.22)$$

كذلك، يمكن وضع المعامل  $1/\rho$  في الحد الثاني من القوس المربع في معادلة (9.2.21) مساويا  $\lambda$  . وعليه

$$\lambda = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 h} \left( \frac{\mu}{-2E} \right)^{1/2} \quad \dots(9.2.23)$$

وهكذا تصبح معادلة (9.2.21) بالصورة التالية

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + \left[ \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] R = 0 \quad \dots(9.2.24)$$

لقيم  $\rho$  الكبيرة ، يؤول الحد الأول في معادلة (9.2.24) الى  $d^2R/d\rho^2$  وتصبح معادلة (9.2.24) على النحو التالي

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} - \frac{1}{4} R = 0 \quad \dots(9.2.25)$$

يكون حل معادلة (9.2.25) كالتالي

$$R(\rho) = e^{\pm \rho/2}$$

بما ان الإشارة الموجبة تؤدي الى حل غير مقبول ، لذلك نختار الإشارة السالبة . أو

$$R(\rho) = e^{-\rho/2} \quad \dots(9.2.26)$$

لتعيين طبيعة هذا الحل بجوار نقطة الأصل ( لقيم  $\rho$  الصغيرة ) نعتبر ما يلي

$$R(\rho) = \frac{1}{\rho} F(\rho) \quad \dots(9.2.27)$$

حيث  $F(\rho)$  دالة مجهولة . بتعويض معادلة (9.2.27) في معادلة (9.2.24) ، نحصل على التالي

$$\frac{d^2F(\rho)}{d\rho^2} + \left[ \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] F(\rho) = 0 \quad \dots(9.2.28)$$

لقيمة  $l = 1 (l \neq 0)$  يكون الحد  $l(l+1)/\rho^2$  كبيرا بالقرب من نقطة الأصل، وتؤول معادلة (9.2.28) الى الصورة التالية

$$\frac{d^2F(\rho)}{d\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}F(\rho)=0 \quad \dots(9.2.29)$$

يكون حل معادلة (9.2.29) على النحو التالي

$$F(\rho) = \text{constant } \rho^s \quad \dots(9.2.30)$$

بتعويض معادلة (9.2.30) في معادلة (9.2.29) ، نجد ان

$$s(s-1) - l(l+1) = 0$$

هذا يعطي  $s = -l$  أو  $s = l + 1$  . وعليه ،

$$R(\rho) = \frac{F(\rho)}{\rho} = \frac{\rho^s}{\rho} = \rho^{s-1} = \rho^{-l-1} \text{ or } \rho^l$$

بالقرب من نقطة الأصل  $\rho \rightarrow 0$  ،  $1/\rho^{l+1} \rightarrow \infty$  وهذا غير مقبول .

مع ذلك بالقرب من الأصل  $\rho \rightarrow 0$  ،  $\rho^l \rightarrow 0$  ، وهذا يكون مقبولا . لذلك نستطيع الفرض ان حل معادلة (9.2.24) يكون على النحو التالي

$$R(\rho) = e^{-\rho/2} \cdot \rho^l \cdot L(\rho) \quad \dots(9.2.31)$$

حيث  $L(\rho)$  دالة مجهولة ويتم تحديدها كما يلي

بتعويض معادلة (9.2.31) في معادلة (9.2.24) ، نحصل على

$$\rho \frac{d^2L(\rho)}{d\rho^2} + [2(l+1) - \rho] \frac{dL(\rho)}{d\rho} + [\lambda - (l+1)]L(\rho) = 0 \quad \dots(9.2.32)$$

لفرض ان حل هذه المعادلة يكون بصورة متسلسلة القوى وعلى الشكل التالي

$$L(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \rho^r \quad \dots(9.2.33)$$

بتعويض معادلة (9.2.33) في معادلة (9.2.32) وبمساواة معامل  $\rho^r$  بالصفري ، نحصل على

$$a_{r+1} = \frac{r+l+1-\lambda}{(r+1)(r+2l+2)} a_r \quad \dots(9.2.34)$$

لقيم  $r$  الكبيرة ، يكون

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r}$$

كما تكون النسبة بين حديين متتابعين في المتسلسلة

$$e^{\rho} = 1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^r}{r!} + \frac{\rho^{r+1}}{(r+1)!} + \dots$$

هي كالتالي

$$\frac{b_{r+1}}{b_r} = \frac{1}{r+1} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r}$$

هكذا لقيم  $\rho$  الكبيرة تتصرف الدالة  $L(\rho)$  مثل الدالة الأسية  $e^{\rho}$ . ولذلك نجد ان

$$R(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \rho^l \cdot e^{-\rho/2} \cdot e^{\rho} \rightarrow \rho^l \cdot e^{\rho/2} \rightarrow \infty$$

تكون صورة الدالة  $R(\rho)$  غير مقبولة . اذا انتهت المتسلسلة غير المحدودة  $L(\rho)$  عند عدد محدود من الحدود ، اي تصبح على صورة كثيرة حدود ، فإنها تصبح حلا صحيحا لمعادلة (9.2.32) . من العلاقة الإسترجاعية (9.2.34) نلاحظ ان هذا المتطلب يتحقق اذا كانت  $r$  تساوي عدد صحيح مثل  $n'$  والذي يعطى كما يلي

$$n' + (l + 1) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = n' + l + 1$$

عندئذ تصبح  $a_{r+1} (= a_{n'+1})$  وكل المعاملات الأعلى مساوية للصفر وتصبح  $L(\rho)$  كثيرة حدود من الدرجة  $n'$

بما ان  $n'$  عدد صحيح موجب ، كذلك تكون  $\lambda$  . وهذا العدد الصحيح  $\lambda$  يرمز له بالرمز  $n$  ويعرف بالعدد الكمي الرئيسي . إذن

$$n = \lambda = n' + l + 1 \quad (9.2.35)$$

حيث

$$\begin{aligned} n' &> 0 \\ n - l - 1 &> 0 \\ l &< n - 1 \end{aligned} \quad \dots(9.2.36)$$

هذا يفرض قيودا على القيم التي تتخذها  $l$  عند اي قيمة من قيم  $n$  المعطاة . بتعويض قيمة  $\lambda$  في معادلة (9.2.23) ، نحصل على

$$E = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mu e^4 Z^2}{\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \dots(9.2.37)$$

$$E = -(13.6 \text{ eV}) \frac{Z^2}{n^2}$$

وعله ، تكون قيم طاقة الإلكترون في ذرة الهيدروجين **مكممة** *quantized* .

### دوال الموجة الشعاعية *Radial Wave Functions*

تعرف كثيرة حدود لاغوارى *Laguerre polynomials* ذات الرتبة  $q$  كما يلي

$$L_q(\rho) = e^\rho \frac{d^q}{d\rho^q} (e^{-\rho} \rho^q) = \left( e^\rho \cdot \frac{d}{d\rho} e^{-\rho} \right)^q \rho^q \quad \dots(9.2.38)$$

بتطبيق معادلة (9.2.38) نحصل على الصيغ الرياضية التالية لكثيرة حدود لاغوارى كما هو مبين ادناه

$$L_0(\rho) = 1$$

$$L_1(\rho) = 1 - \rho$$

$$L_2(\rho) = 2 - 4\rho + \rho^2$$

$$L_3(\rho) = 6 - 18\rho + 9\rho^2 - \rho^3$$

$$L_4(\rho) = 24 - 96\rho + 72\rho^2 - 16\rho^3 + \rho^4$$

$$L_5(\rho) = 120 - 600\rho + 600\rho^2 - 200\rho^3 + 25\rho^4 - \rho^5$$

$$L_6(\rho) = 720 - 4320\rho + 5400\rho^2 - 2400\rho^3 + 450\rho^4 - 36\rho^5 + \rho^6$$

كما تعرف كثيرة حدود لاغوارى المرافقة كالتالي

$$L_q^p(\rho) = \frac{d^p}{d\rho^p} L_q(\rho) = \frac{d^p}{d\rho^p} \left[ e^\rho \cdot \frac{d^q}{d\rho^q} (\rho^q \cdot e^{-\rho}) \right] \quad \dots(9.2.39)$$

تحقق كثيرات الحدود  $L_q^p(\rho)$  المعادلة التفاضلية التالية

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} L_q^p(\rho) + (p+1-\rho) \frac{d}{d\rho} L_q^p(\rho) + (q-p) L_q^p(\rho) = 0 \quad \dots(9.2.40)$$

بمقارنة معادلة (9.2.32) التي بها  $\lambda = n$  بمعادلة (9.2.40) ، نحصل على

$$p = 2l + 1, \quad q = n + l$$

من وجهة نظر هذه المقارنة نستطيع كتابة حل معادلة (9.2.32) كالدالة  $L_{n+l}^{2l+1}$  . وعليه ، يكون حل المعادلة الشعاعية كما يلي

$$R_{nl}(\rho) = N_{nl} \rho^l \cdot e^{-\rho/2} \cdot L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad \dots(9.2.41)$$

حيث

$$L_{n+l}^{2l+1} = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+1} \frac{(n+l)!}{(n-l-1-k)! \cdot (2l+1+k)! k!} \rho^k$$

كما يتعين ثابت المعايرة  $N_{nl}$  باستخدام الخاصية التالية لكثيرة حدود لاغاري

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho} \rho^{p+1} \cdot [L_q^p(\rho)]^2 d\rho = \frac{2q-p+1}{(q-p)!} \cdot (q!)^3 \quad \dots(9.2.42)$$

كما يكون ثابت المعايرة للدالة الشعاعية  $R_{nl}(\rho)$  كالتالي

$$\int_0^{\infty} |R_{nl}(r)|^2 r^2 dr = 1, \quad \dots(9.2.43)$$

مع الأخذ بعين الإعتبار ان

$$\rho = \alpha r = \left( \frac{2Z}{na_0} \right) r,$$

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{\mu e^2} = 0.53 \text{ \AA}.$$

حيث  $a_0$  هو نصف قطر بور . يكون شرط المايرة لمعادلة (9.2.43) بالصورة التالية

$$N_{nl}^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^3} \cdot \rho^{2l} \cdot e^{-\rho} \left| L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \right|^2 \cdot \rho^2 d\rho = 1$$

$$\frac{N_{nl}}{\alpha^3} \cdot \left[ \frac{2(n+l) - (2l+1) + 1}{(n-l-1)!} \cdot \{(n+l)!\}^3 \right] = 1$$

$$N_{nl} = \pm \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}}$$

في العلاقة السابقة نختار الإشارة السالبة لجعل الدالة  $R_{10}(r)$  موجبة . وعليه ، تكون دالة الموجة الشعاعية كما يلي

$$R_{nl}(\rho) = - \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n\{(n+l)!\}^3}} \cdot e^{-\rho/2} \cdot \rho^l \cdot L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \quad \dots(9.2.44)$$

فيما يلي بعض الصيغ الرياضية لدالة الموجة الشعاعية

$$R_{10}(r) = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \cdot e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{20} = \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \cdot 2 \left( 1 - \frac{Zr}{2a_0} \right) \cdot e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{21}(r) = \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{Zr}{a_0} \cdot e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{30}(r) = \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \cdot 2 \left[ 1 - \frac{2Zr}{3a_0} - \frac{2}{27} \cdot \left( \frac{Zr}{a_0} \right)^2 \right] \cdot e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{31}(r) = \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{Zr}{a_0} \cdot \left( 1 - \frac{Zr}{6a_0} \right) \cdot e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{32}(r) = \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{3/2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{Zr}{a_0} \right)^2 \cdot e^{-Zr/3a_0}$$

وعليه ، تكون دالة الموجة الكاملة كما يلي

$$\Psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$$

$$\Psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi) = \left[ \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{(2n)\{(n+l)!\}^3} \right]^{1/2} \cdot e^{-Zr/na_0} \cdot \left( \frac{2Zr}{na_0} \right)^l \cdot L_{n+l}^{2l+1} \left( \frac{2Zr}{na_0} \right) \cdot Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \quad \dots(9.2.45)$$



نلاحظ ان دالة الموجة المعطاة بمعادلة (9.2.45) تمثل حالة الإلكترون الكمية وتكون متميزة بمجموعة من الأعداد الكمية  $n, l, m_l$ . عند  $n=1$  يوجد فقط حالة واحدة  $\psi_{100}$ ، وعندما  $n=2$  يوجد اربع حالات هي  $\psi_{200}, \psi_{210}, \psi_{211}, \psi_{21+1}$ . عند دراسة الأطياف يرمز للحالات المقابلة لقيمة ما من قيم  $l$  المعطاة كما يلي

$$l = 0, s\text{-state}; l = 1, p\text{-state}; l = 2, d\text{-state}, l = 2, f\text{-state}$$

### (9.3) بعد الإلكترون الأكثر احتمالاً عن النواة *Most Probable distance of Electron from Nucleus*

تعطى احتمالية تواجد الإلكترون في اي حالة بالعلاقة التالية

$$P(r, \theta, \varphi) = |\psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)|^2 d\tau = |\psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad \dots(9.3.1)$$

كما تكون دالة الموجة للحالة الأرضية *ground state* كالتالي

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \cdot e^{-r/a_0} \quad \dots(9.3.2)$$

تكون احتمالية تواجد الإلكترون بين  $r$  ،  $r + dr$  ، بغض النظر عن الإحداثيات  $\varphi$  ،  $\theta$  كما يلي

$$\begin{aligned} P(r)dr &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \left( \frac{1}{\pi a_0^3} \right) e^{-2r/a_0} \cdot r^2 dr \\ &= \frac{4}{a_0^3} \cdot e^{-2r/a_0} \cdot r^2 dr \quad \dots(9.3.3) \end{aligned}$$

تعرف قيمة المسافة الشعاعية التي تحقق الشرط التالي

$$\frac{d}{dr} P(r) = \frac{d}{dr} \left[ \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} \right] = 0 \quad \dots(9.3.4)$$

$r = a_0$

بالمسافة الأكثر احتمالاً لتواجد الإلكترون .

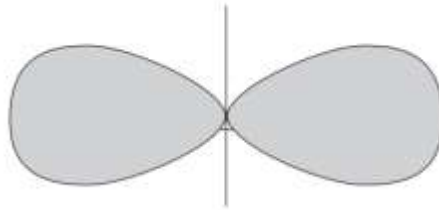
هكذا ، تكون الاحتمالية العظمى لتواجد الإلكترون في الحالة 1s هي عند المسافة التالية

$$r = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.53 \text{ \AA}.$$

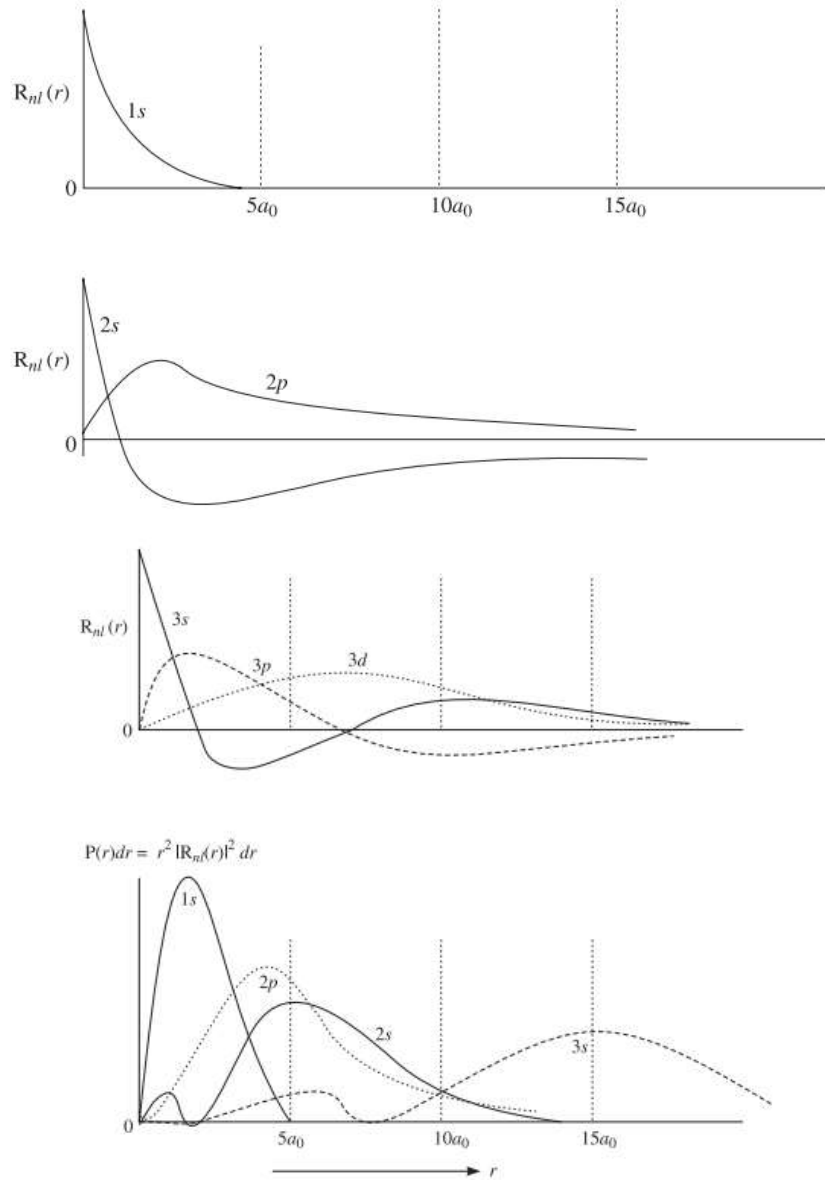
يمكن تمثيل دالة الإحتمالية في الحالات:  $s$ -state,  $p$ -states بيانيا كما في الأشكال (9.3.1) و (9.3.2) على الترتيب .



شكل (9.3.1) دالة الأاحتمال الزاوية في حالة s .



شكل (9.3.2) دالة الأاحتمال الزاوية للحالة p .



شكل (9.3.3) دالة الموجة الشعاعية والإحتمالية الشعاعية في الحالات الكمية.

#### (9.4) التشعبية لمستويات طاقة الهيدروجين Degeneracy of Hydrogen Energy Levels

رأينا ان كل حالة كمية تتميز بمجموعة من الأرقام الكمية  $n, l, m_l$ . فمثلا، لقيم  $n=1$  تكون  $l=0, m_l=0$ ، فإنه يرمز للحالة المقابلة بالرمز  $\Psi_{100}$  وتعرف هذه الحالة بالحالة الأرضية. عند  $n=2$  تكون  $l=0, 1$ . كما ان لقيمة  $l=0$  تكون  $m_l=0$  وعند  $l=1$  تكون  $m_l=1, 0, -1$ . هكذا يوجد اربع حالات يرمز لها بالرموز التالية:  $\Psi_{200}, \Psi_{211}, \Psi_{210}, \Psi_{21+1}$ . بما ان طاقة الإلكترون الكلية تعتمد على الرقم الكمي الرئيسي  $n$ ، تكون هذه الحالات متساوية الطاقة. ويقال ان مستوى الطاقة هذا ( $n=2$ ) متشعبا بطويات

اربعة ثنيات *four fold degenerate* . يعزى سبب التشعب هذا الى تماثل جهد كولوم . كما يزول هذا التشعب في مستويات طاقة ذرة الهيدروجين عند تسليط مجال مغناطيسي خارجي على هذه الذرات .

إضافة الى هذا التشعب السابق يوجد تشعب آخر ، الذي ينتج بسبب اختلاف قيم  $m_l$  للمستويات ذات نفس الأرقام الكمية  $n, l$  ويكون لها نفس الطاقة ايضا . بما انه يوجد  $2l + 1$  قيمة مختلفة من  $m_l$  لكل قيمة من  $n, l$  ، لذلك يكون لكل مستوى  $2l + 1$  ثنية تشعبية . وتكون هذه التشعبية عامة لكل المجالات المركزية ( الجهود التي هي دالة للمسفة الشعاعية  $r$  ) فقط . وتزول هذه التشعبية بإستخدام مجال خارجي غير مركزي كالمجال المغناطيسي . حيث يجعل هذا المجال مستويات الطاقة التي لها قيم  $m_l$  المختلفة تملك طاقات مختلفة . وعرف ظاهرة انفصال مستويات الطاقة بفعل المجال الخارجي المغناطيسي بظاهرة *Zeeman effect* .

### (9.5) خصائص دوال موجة ذرة الهيدروجين *Properties of Hydrogen Atom Wave Functions*

حيث ان الصيغة الرياضية في الأحداثيات الكروية للمؤثر  $\hat{L}_2$  هي

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

والصيغة الرياضية لمركبة  $z$ - للمؤثر  $\hat{L}$  هي

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

وعليه ، فإن

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \psi &= -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] R \Theta \Phi \\ &= -\hbar^2 R \left[ \frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right] \\ &= -\hbar^2 R \left[ \frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta \right] \\ &= -\hbar^2 R \Phi \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta \right] \end{aligned}$$

$$= -\hbar^2 R \Phi [-l(l+1)\Theta]$$

$$= l(l+1)\hbar^2 \psi$$

وعليه ، تكون القيمة الذاتية للمؤثر  $\hat{L}$  هي  $l(l+1)\hbar^2$  . هذا يعني ان قياس مربع الزخم الزاوي يعطى بالقيمة التالية

$$|L|^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad \text{or} \quad |L| = \sqrt{l(l+1)}\hbar^2$$

بما ان قيمة الزخم الزاوي تحدد بالعدد الكمي  $l$  لذلك تسمى  $l$  العدد الكمي للزخم الزاوي المداري. وهذا العدد الكمي يتخذ قيم محددة فقط ، أي يكون مقدار الزخم الزاوي مكما *quantized* . وعليه ،

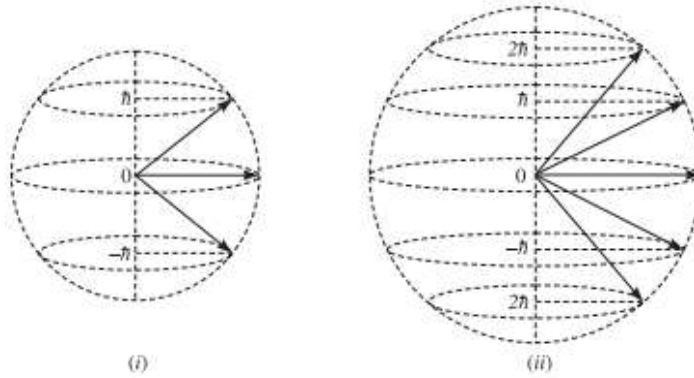
$$\hat{L}_z \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} [R\Theta\Phi]$$

$$= -i\hbar R \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

$$= -i\hbar m_l R \Theta \Phi$$

$$= m_l \hbar \psi$$

(اظر للشكل (9.5.1) المبين ادناه .



(i) For  $l = 1$ ,  $L = \sqrt{2}\hbar$ ,  $L_z = \hbar, 0, -\hbar$

(ii) For  $l = 2$ ,  $L = \sqrt{6}\hbar$ ,  $L_z = 2\hbar, \hbar, 0, -\hbar, -2\hbar$

شكل (9.5.1) ترتيبات متجة الزخم الزاوي المسموحة .

وعليه ، تتخذ مركبة الزخم الزاوي في اتجاه محور  $z$ - قيم منفصلة فقط ، اي ان هناك ترتيبات محددة للزخم الزاوي في الفضاء . في النموذج الأتجاهي للذرة ، يعمل متجة هذا الزخم حركة مغزلية *proccessional motion* حول محور  $z$  بحيث يكون مسقطه على هذا المحور يشكل قيم ثابتة ويكون متوسط مركبات هذا الزخم في اتجاهي محوري  $x , y$  تساوي صفرا .

كما يعرف تكميم اتجاه الزخم الزاوي بكميم الفضاء *space quantization* . فمثلا في حالة  $l = 1$  ، تكون قيمة الزخم الزاوي كالتالي

$$|L| = \sqrt{1(1+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar \text{ and } m_l = 1, 0, -1.$$

اي ان متجة  $L$  الإلكترون الموجود في هذا المستوى ( $l=1$ ) ثلاث ترتيبات . وبالمثل ، للإلكترون الموجود في المستوى  $l=2$  يكون هناك خمس ترتيبات لمتجة الزخم الزاوي ( لاحظ الشكل 9.5.1) ويكون مقدار هذا الزخم كما يلي

$$|L| = \sqrt{2(2+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar \text{ and } m_l = 2, 1, 0, -1, -2.$$

عموما ، تكون الإتجاهات الممكنة لمتجة الزخم الزاوي كما يلي

$$\cos\theta = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$

تمارين محلولة

(1) برهن ان الدوال التوافقية الكروية :  $Y_{2,1}, Y_{1,1}$  تكون متعامدة ؟.

الحل

$$\begin{aligned}
\int Y_{1,1}^* Y_{2,1} d\tau &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \cdot e^{-i\varphi} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \cdot e^{i\varphi} \cdot \sin\theta d\theta \\
&= \frac{3\sqrt{5}}{8\pi} \int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{3\sqrt{5}}{8\pi} \left[ \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \cos\theta \cdot \sin\theta d\theta \right] [2\pi] \\
&= 0. \text{ (To evaluate the integral put } \cos\theta = x)
\end{aligned}$$

(2) اذا كانت دالة الحالة الأرضية في ذرة الهيدروجين تعطى بالصورة التالية

$$\psi = A \exp(-r/a_0)$$

استخدم شرط المعايرة لإيجاد الثابت  $A$  ، ثم برهن ان

$$\langle r \rangle = \frac{3a_0}{2}$$

**الحل**

شرط التعامد هو

$$\int |\psi|^2 d\tau = 1$$

$$\int_0^\infty A^2 e^{-2r/a_0} \cdot 4\pi r^2 dr = 1$$

$$4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr = 1$$

$$4\pi A^2 \left( \frac{a_0}{2} \right)^3 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 1 \quad (\text{Put } 2r/a_0 = x)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \quad (\text{The value of integral is } \Gamma(3))$$

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} \psi^*(r) r \psi(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{a_0}{4} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = \frac{3a_0}{2}$$

(3) اذا كانت دالة موجة ذرة الهيدروجين للحالة الأرضية كما يلي

$$\Psi_{100} = \left( \frac{1}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} \exp(-r/a_0)$$

جد احتمالية تواجد الإلكترون ضمن كرة نصف قطرها  $r = a_0$ .

**الحل**

$$P = \int_0^{a_0} \Psi_{100}^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 \exp(-2r/a_0) dr$$

باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة ، نحصل على مقدار هذا التكامل كالتالي

$$= \frac{-5}{e^2} + 1 = 0.32$$

(4) اذا كانت دالة موجة ذرة الهيدروجين كما يلي

$$\Psi_{210} = A[\exp(-r/2a_0)] \cdot r \cdot \cos\theta$$

جد الثابت  $A$  ؟.

**الحل :** باستخدام شرط المعايرة نحصل على ما يلي



$$1 = \int_0^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} A^2 [\exp(-r/a_0)] r^4 dr \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot d\varphi$$

$$1 = 2\pi A^2 \int_0^{\infty} r^4 \exp(-r/a_0) dr \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$1 = 2\pi A^2 \left[ \int_0^{\infty} r^4 \exp(-r/a_0) dr \right] \left[ \frac{2}{3} \right] [2\pi]$$

:

$$1 = 2\pi A^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot a_0^5 \int_0^{\infty} x^4 \exp(-x) dx$$

من الجداول الرياضية نجد ان قيمة هذا التكامل يساوي  $\Gamma(5)$  . وعليه ، تكون قيمة  $A$  كما يلي

$$A = \left( \frac{1}{32\pi a_0^5} \right)^{1/2}$$

إذا

$$\Psi_{210} = \left( \frac{1}{32\pi a_0^5} \right)^{1/2} r \cos \theta \cdot \exp(-r/2a_0)$$

## تمارين

(1) اذا كانت دالة التوافقات الكروية معرفة كالتالي

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot \frac{(1-x^2)^{|m|/2}}{l! \cdot 2^l} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} \left[ \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1) \right]$$

حيث  $x = \cos \theta$  . جد ما يلي

$$Y_{00}, Y_{10}, Y_{11}, Y_{1-1}, Y_{20}, Y_{21}, Y_{2-1}, Y_{22}, Y_{2-2}.$$

(2) اذا كانت كثيرة حدود لاغوري معرفة كالتالي

$$L_q^p(\rho) = \frac{d^p}{d\rho^p} \left[ e^\rho \cdot \frac{d^q}{d\rho^q} (\rho^q \cdot e^{-\rho}) \right]$$

جد ما يلي

$$L_1^1, L_2^1, L_3^3.$$

(3) اذا كانت دوال الموجة لذرة الهيدروجين كما يلي

$$\Psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi) = \left[ \left( \frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{(2n)\{(n+l)!\}^3} \right]^{1/2} \cdot e^{-Zr/na_0} \cdot \left( \frac{2Zr}{na_0} \right) \cdot L_{n+l}^{2l+1} \left( \frac{2Zr}{na_0} \right) \cdot Y_{lm_l}(\theta, \varphi)$$

جد ما يلي

$$\Psi_{100}, \Psi_{210}, \Psi_{21\pm 1}.$$

(4) اذا كان الجزء الشعاعي من دالة الموجة للحالة  $n = 2, l = 1$  معطى كالتالي

$$\Psi_{21}(r) = \left( \frac{2}{a_0} \right)^{3/2} \left( \frac{r}{\sqrt{3} a_0} \right) \exp(-r/2a_0),$$

حيث  $a_0$  نصف قطر بور . جد (i) دالة التوزيع الإحتمالية ، ثم جد المسافة الأغلب احتمالا بين البروتون والإلكترون . (ii) احسب حجم ذرة الهيدروجين  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  لهذه الحالة .

(5) اذا كانت معادلة ذرة الهيدروجين الشعاعية كما يلي

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] R = 0$$

استخدم التحويل :  $R(r) = \chi/r$  للحصول على المعادلة التالية

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \chi = E\chi$$

(6) حل معادلة ذرة الهيدروجين الشعاعية التالية لإيجاد مستويات الطاقة

$$\rho L''(\rho) + (2l+2-\rho)L'(\rho) + [\lambda - l(l+1)]L(\rho) = 0$$

حيث

$$\lambda = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \left( \frac{\mu}{-2E} \right)^{1/2} \text{ and } \alpha = \sqrt{\frac{-8\mu E}{\hbar^2}}$$

(7) اذا كانت دالة موجة ذرة الهيدروجين المعاييرة معطاة كما يلي

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \exp(-r/a_0)$$

(a) مثل بيانيا دوال الموجة وكثافة الإحتمالية كدوال للمتغير  $r$

(b) جد نصف القطر الذي يكون عنده الإلكترون موجودا في الغالب (الأكثر احتمالا).

(c) جد احتمالية تمركز الإلكترون بين المسافتين :  $r = \frac{3a_0}{2}$  ,  $r = \frac{a_0}{2}$  .

(8) اذا كانت ذرة الهيدروجين في الحالة الأرضية توصف بالدالة

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp(-r/a_0)$$

(a) احسب احتمالية ايجاد الإلكترون في المدى  $\frac{a_0}{2} < r < 2a_0$ .

(b) جد كثافة الإحتمال الشعاعية كدالة للمسافة  $r$ ، ثم جد قيمة  $r$  التي تجعل هذه الكثافة اعظم ما يمكن.

(c) احسب متوسط نصف قطر ذرة الهيدروجين.

(9) اذا كانت دالة موجة ذرة الهيدروجين المعاييرة كالتالي

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp(-r/a_0)$$

جد قيمة  $r$  المتوقعة ونصف القطر الأكثر احتمالا للحالة الأرضية.

(10) اذا كانت دالة موجة الهيدروجين التي تصف الإلكترون في الحالة  $1s$  معطاة كالتالي

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp(-r/a_0)$$

(a) جد متوسط بعد الإلكترون عن النواة.

(b) جد احتمالية  $P(r)dr$  كدالة للمتغير  $r$  وقارنها مع تنبؤ نموذج بور.

(11) (a) اذا كانت دالة الموجة الكاملة لذرة الهيدروجين للحالة  $2p$  معطاة كالتالي

$$\psi_{210} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2\pi a_0^3}} \left( \frac{r}{a_0} \right) \cos \theta \exp(-r/2a_0)$$

برهن ان هذه الدالة تكون معاييرة.

(b) جد القيمة المتوقعة لبعده الإلكترون عن النواة في ذرة الهيدروجين لهذه الحالة.

- (1) R.B. Singh , *Introduction to Modern Physics Vol.1*, New Age International Limited Publishers, New Delhi, 2<sup>nd</sup> edition (2009).
  - (2) A.Beiser, *concepts of modern Physics*, McGraw Hill com., 6<sup>th</sup> ed. (2002)
  - (3) Peter J.Nolan, *Fundamentals of Modern Physics*, 1<sup>st</sup> edition, USA(2014).
  - (4) Kenth S.Krane, *Modern Physics*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley &sons,Inc.
  - (5) M.Jammer, *The Philosphy of Quantum Mechanics*, New York (1974).
  - (6) B.L.Cline , *Men who made a new Physics and Quantum Theory*, Chicago, USA (1987).
  - (7) David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice-Hall,Inc.,New Jersey(1995).
  - (8) Percy Bridgman, *The Logic of Modern Physics*, MacMillan,New York (1927).
  - (9) John C. Morrison, *Modern Physics for Scientists and Enginrees*, Elsevier B.V., 2<sup>nd</sup> edit (2015).
  - (10) Paul A. Tiper and Ralph A.Liewellyn, *Modern Physics*, Clancy Marsall, 5<sup>th</sup> edit (2008).
  - (11) Serway, Moses, and Moyer, *Modern Physics*, Brooks/Cole, 2<sup>nd</sup> edit.
  - (12) Thornton and Rex, *Modern Physics for Scientists and Engineers*, 3<sup>rd</sup> ed.
-